Zahlentheorie der Tettarionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät
(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

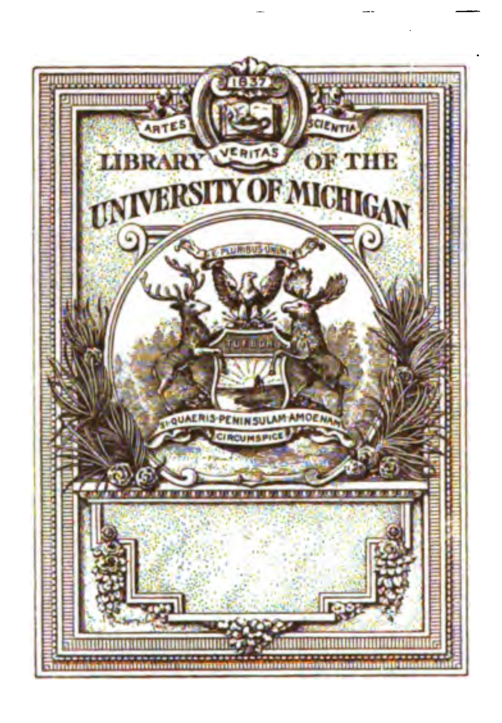
von

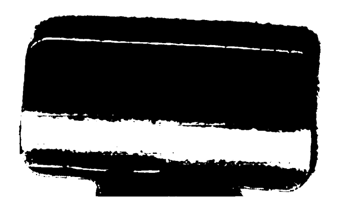
L. Gustav Du Pasquier

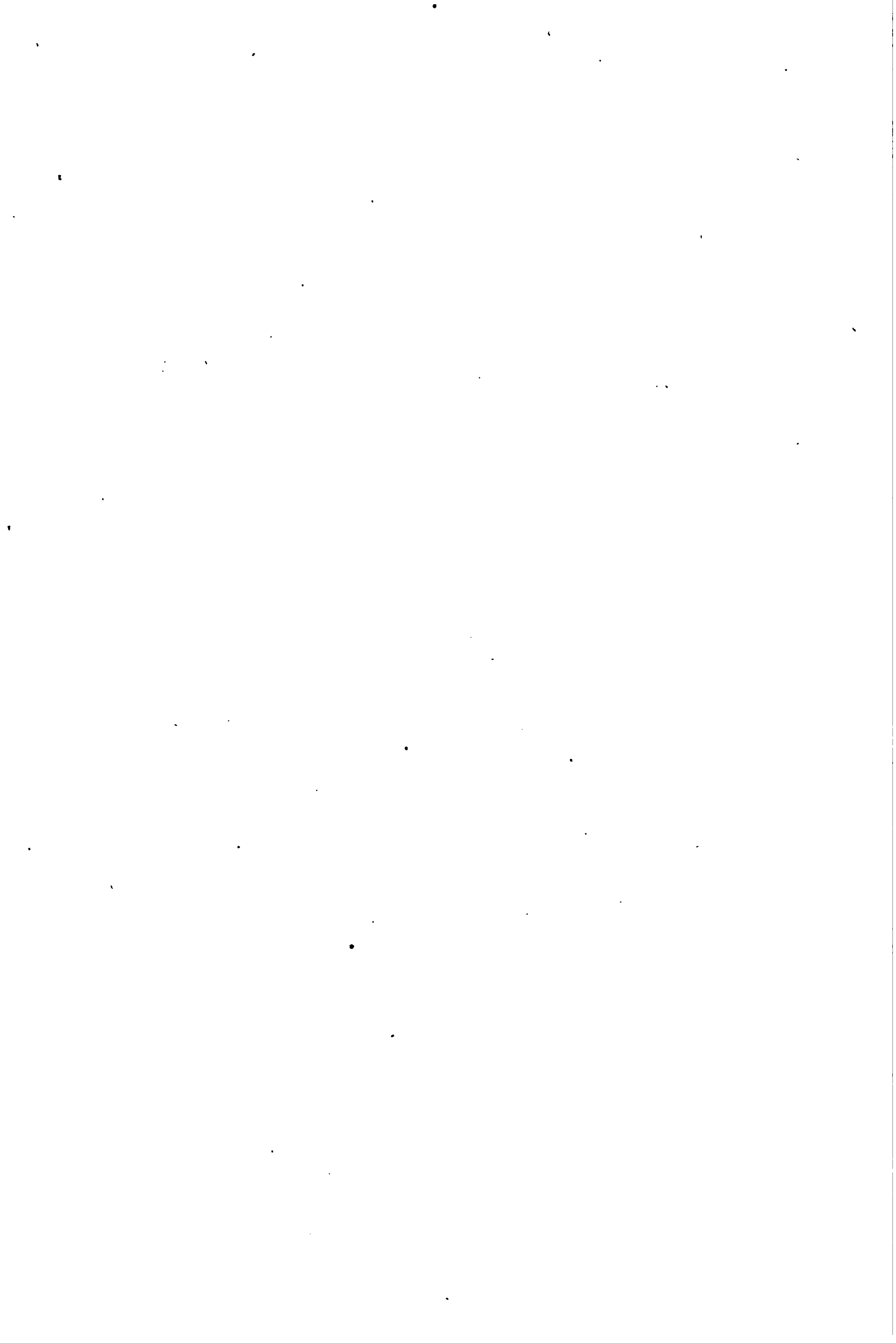
aus Neuchâtel.

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. *H. Burkhardt*,
Prof. Dr. *A. Hurwitz*.

Zürich
Druck von Zürcher & Furrer
1906.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





Zahlentheorie der Tettarionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

L. Gustav Du Pasquier

aus Neuchâtel.

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. *H. Burkhardt*,
Prof. Dr. *A. Hurwitz*.

Zürich

Druck von Zürcher & Furrer

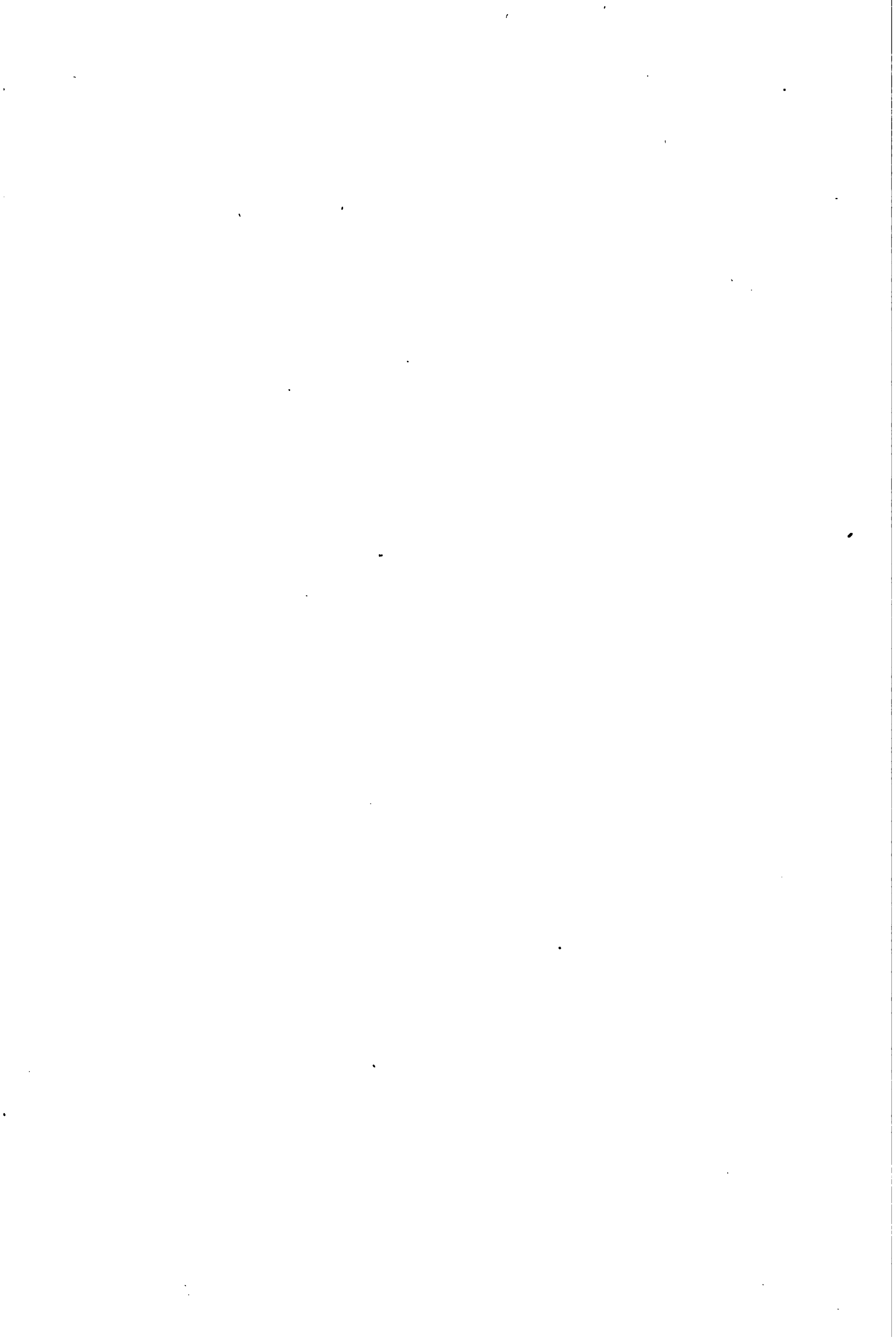
1906.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. A. Hurwitz

in aufrichtiger

Dankbarkeit und Liebe gewidmet.

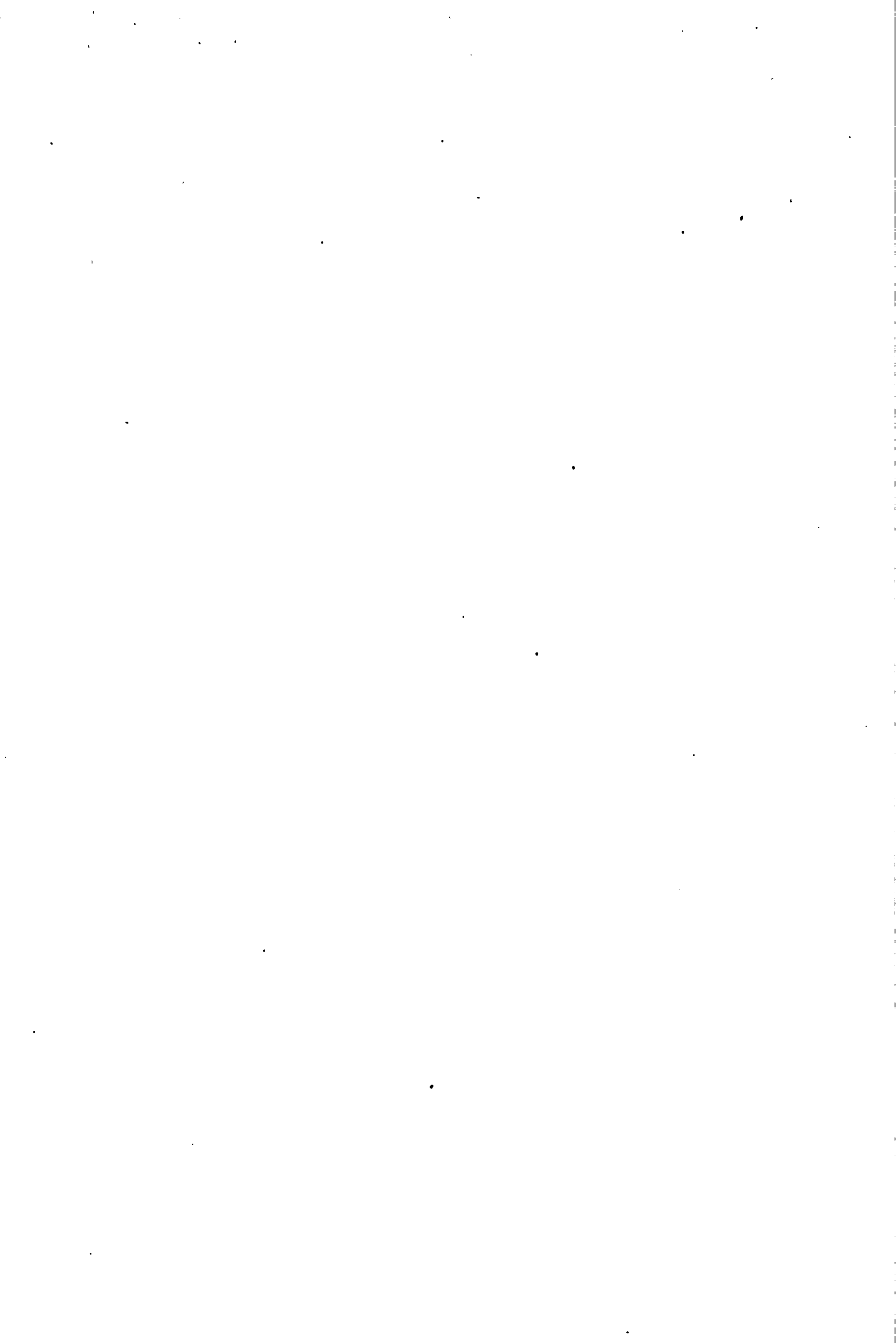


Die Anregung zu vorliegender Arbeit verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. A. Hurwitz.

Dafür, sowie für die vielfache Förderung, die er mir in liebenswürdigster Weise zu teil werden liess, spreche ich ihm meinen innigen Dank aus.

L. Gustav Du Pasquier.



Zahlentheorie der Tettarionen.

Von

L. Gustav du Pasquier.

Erster Teil: *Allgemeine Grundlagen.*

Kapitel I.

Bezeichnungen und Operationsregeln.

Einleitung.

Das in vorliegender Arbeit verfolgte Ziel ist, möglichst allgemein gefasst, folgendes: Die linearen Substitutionen bei n homogenen Veränderlichen bilden ein System von „komplexen Zahlen mit n^2 unabhängigen Haupteinheiten", wobei die Multiplikation durch das Gesetz der Komposition von Substitutionen geregelt wird. Es soll untersucht werden, in wie weit die Begriffe und Methoden, welche der Theorie der rationalen Zahlen zu Grunde liegen, sich auf die Behandlung dieser Zahlensysteme mit nicht kommutativer Multiplikation anwenden lassen.

Einige der aufgezählten Eigenschaften sind, wenn auch in anderer Form, bereits bekannt und infolgedessen hier oft ohne Beweis angeführt. Als grundlegend wird die von Frobenius in „Crelle's Journal" Bd. 84 veröffentlichte Arbeit „Über lineare Substitutionen und bilineare Formen" angesehen; v. auch Paul Bachmanns „Zahlentheorie" Bd. IV, wo sich weitere Literaturangaben vorfinden. — Die allgemeinen Methoden wurden von Hurwitz in seiner Abhandlung „Über die Zahlentheorie der Quaternionen" (Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; 1896, Heft 4) zum ersten Male angewandt. Neu ist hier, neben der Bezeichnung, der Standpunkt, von dem aus die linearen Substitutionen betrachtet werden, sowie die hierbei sich ergebenden Fragestellungen, namentlich die Theorie der Ideale mit ihren Konsequenzen.

§ 1. Begriff des Tettarions; gleiche und entgegengesetzte Tettarionen; das Nulltettarion, Addition und Subtraktion der Tettarionen.

Im Falle von zwei homogenen Veränderlichen lassen sich die linearen Substitutionen oder Transformationen wie $\left\{\begin{matrix} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{matrix}\right\}$ oder vielmehr die dabei auftretenden quadratischen Matrices der Zahlen-

koeffizienten α, β, γ, δ, beim Rechnen mit ihnen, einfach als Zahlenquadrupel auffassen. Diese Erwägung führt auf die Betrachtung eines gewissen Systemes $\{T\}$ von „komplexen Zahlen mit vier unabhängigen Haupteinheiten" der Art, dass einer beliebigen linearen Transformation eine ganz bestimmte komplexe Zahl aus $\{T\}$ zugeordnet wird, und umgekehrt.

Ganz Ähnliches gilt für lineare Substitutionen bei μ homogenen Veränderlichen; das System $\{T\}$ besteht dann aus „komplexen Zahlen mit μ^2 unabhängigen Haupteinheiten".

Jede in dieser Mannigfaltigkeit $\{T\}$ enthaltene „komplexe Zahl" t möge „Tettarion" genannt und durch das Symbol

$$t = \left\{ \begin{matrix} t_{11}, & t_{12}, \ldots\ldots & t_{1,\mu} \\ t_{21}, & t_{22}, \ldots\ldots & t_{2,\mu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ t_{\mu,1}, & t_{\mu,2}, \ldots\ldots & t_{\mu,\mu} \end{matrix} \right\}.$$

bezeichnet werden. — Die Benennung „Tettarion" soll andeuten, dass die betreffende komplexe Zahl, auf die oben angegebene Weise, sich durch ein „quadratisches" Schema darstellen lässt.

Die hierbei auftretenden Zahlen $t_{i,k}$, welche im folgenden stets als gewöhnliche reelle Zahlen vorausgesetzt werden, mögen „Componenten" des Tettarions, ihr Inbegriff, in obiger Art nach μ Zeilen und μ Kolonnen geordnet, das „Komponentensystem" des Tettarions genannt werden. — Je nachdem 2, 3 u. s. w. . . allgemein μ solcher Zeilen und Kolonnen vorhanden sind, soll von „Düotettarionen", „Tritettarionen", u. s. w. . ., allgemein von „μ-Tettarionen", die Rede sein.

Zur Bezeichnung der Komponenten wird immer derselbe Buchstabe dienen, der das Tettarion selbst vorstellt, nur werden an denselben in üblicher Weise zwei untere Indices angefügt werden, von denen der erste den Rang der Zeile, der zweite den Rang der Kolonne im Komponentensysteme angibt.

Die Zahlen $t_{11}, t_{22}, \ldots\ldots t_{\mu,\mu}$ heissen „die in der Hauptdiagonale stehenden Komponenten" des Tettarions t, oder kurz „die Diagonalkomponenten" von t. — Die Zahlen $t_{1,\mu}, t_{2,\mu-1}, t_{3,\mu-2}, \ldots\ldots t_{\mu-1,2}, t_{\mu,1}$ bilden „die Nebendiagonale von t".

1. Zwei oder mehrere μ-Tettarionen heissen dann und nur dann „einander gleich", wenn je die entsprechenden Komponenten gleich sind. Ein Gleichheitszeichen zwischen μ-Tettarionen ist demnach μ^2 Gleichungen zwischen gewöhnlichen reellen Zahlen äquivalent.

Zwei μ-Tettarionen sollen „einander entgegengesetzt" heissen, wenn jeweilen die entsprechenden Komponenten denselben absoluten Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Das μ-Tettarion, dessen Komponentensystem aus lauter Nullen besteht, soll „Nulltettarion", oder kurz „Null" genannt und mit 0 bezeichnet werden.

2. Es soll, wie dies bei komplexen Zahlen gewöhnlich geschieht, die Addition folgendermassen definiert werden:

Tettarionen werden addiert, indem man die entsprechenden Komponenten der einzelnen Summanden addiert.

Beispiel für Düotettarionen:

$$a + b = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{11}, b_{12} \\ b_{21}, b_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21}, a_{22} + b_{22} \end{Bmatrix}$$

Hieraus ersieht man direkt folgende Eigenschaften der Addition von μ-Tettarionen: a) sie ist commutativ: $a + b = b + a$

b) sie ist assoziativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$

c) Ein μ-Tettarion wird nicht geändert durch Addition des Nulltettarions: $a + o = a$.

3. Bedeuten a und b zwei beliebige μ-Tettarionen, so ist in vollkommen eindeutiger Weise ein μ-Tettarion x bestimmt derart, dass $a + x = b$. Dieses x heisst „die Differenz von a und b" und seine Bildung: „Die Subtraktion des μ-Tettarions a vom μ-Tettarion b", in Zeichen: $x = b - a$.

μ-Tettarionen werden subtrahiert, indem man die entsprechenden Komponenten subtrahiert.

Durch Subtraktion vom Nulltettarion geht jedes μ-Tettarion in sein entgegengesetztes über, und umgekehrt ergibt die Addition eines μ-Tettarions und seines entgegengesetzten stets das Nulltettarion.

§ 2. Multiplikation der Tettarionen; Haupteinheiten; Vertauschbarkeit; das Haupttettarion h; die reellen Tettarionen.

1. Addiert man ein beliebiges μ-Tettarion m mal zu sich selbst, so wird jede einzelne seiner Komponenten mit m multipliziert.

Dies führt zu folgender Definition:

Ein μ-Tettarion t wird mit einer reellen Zahl r multipliziert, indem man jede seiner Komponenten mit r multipliziert.

$$r \cdot t = \begin{Bmatrix} r \cdot t_{11}, & r \cdot t_{12}, & \ldots\ldots\ldots & r \cdot t_{1,\mu} \\ r \cdot t_{21}, & r \cdot t_{22}, & \ldots\ldots\ldots & r \cdot t_{2,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ r \cdot t_{\mu,1}, & r \cdot t_{\mu,2} & \ldots\ldots\ldots & r \cdot t_{\mu,\mu} \end{Bmatrix}$$

Diese Multiplikation ist kommutativ: $r \cdot t = t \cdot r$.

2. Aus den bisherigen Festlegungen folgt ferner, dass jedes μ-Tettarion sich additiv mit numerischen Koeffizienten zusammensetzen lässt aus μ^2 passend gewählten speziellen; z. B. für Düotettarionen:

$$\begin{Bmatrix} t_{11}, t_{12} \\ t_{21}, t_{22} \end{Bmatrix} = t_{11} \cdot \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{Bmatrix} + t_{12} \cdot \begin{Bmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{Bmatrix} + t_{21} \cdot \begin{Bmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{Bmatrix} + t_{22} \cdot \begin{Bmatrix} 0,0 \\ 0,1 \end{Bmatrix}$$

Diese geeignet gewählten speziellen Tettarionen werden „Haupteinheiten" genannt und durch einfache Zeichen dargestellt, z. B:

$$e^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 1, 0, \ldots\ldots 0 \\ 0, 0, \ldots\ldots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, \ldots\ldots 0 \end{vmatrix} \qquad e^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 0, 1, 0 \ldots\ldots 0 \\ 0, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, 0 \ldots\ldots 0 \end{vmatrix}$$

ähnlich $e^{(i,k)}$ bei μ-Tettarionen.

Ein beliebiges μ-Tettarion lässt sich demnach stets in die Form bringen:

$$t = t_{1,1} \cdot e^{(1,1)} + t_{1,2} \cdot e^{(1,2)} + \cdots\cdots + t_{\mu,\mu} \cdot e^{(\mu,\mu)} = \sum_{i,k}^{1\ldots\mu}{}' t_{i,k} \cdot e^{(i,k)}.$$

3. Die Multiplikation von Tettarionen miteinander soll nach derselben Verknüpfungsregel geschehen wie die Zusammensetzung oder Komposition von linearen Substitutionen, so dass die eindeutig umkehrbare Zuordnung der Tettarionen zu den linearen Substitutionen nicht nur bei Addition und Subtraktion, sondern auch bei Multiplikation erhalten bleibt.

Bedeuten a und b zwei beliebige μ-Tettarionen, so sei unter dem „Produkt aus a und b" das μ-Tettarion $c = a \cdot b$ verstanden, dessen Komponenten nach folgender Regel gebildet werden:

$$c_{i,k} = \sum_{\lambda}^{1\ldots\mu} a_{i,\lambda} \cdot b_{\lambda,k}.$$

Durch die bisherigen Definitionen sind auch die Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, demnach die ganzen rationalen Funktionen eines μ-Tettarions, in unzweideutiger Weise definiert. Jede ganze rationale Funktion von μ-Tettarionen $a, b, \ldots. f$ ist wieder ein gewisses μ-Tettarion: $G(a, b, \ldots. f)$.

Obiger Definition zufolge gelten die Gesetze, welche die Zusammensetzung der linearen Substitutionen beherrschen, auch ohne weiteres für die Multiplikation von μ-Tettarionen:

a) Die Multiplikation der μ-Tettarionen ist assoziativ:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

b) Sie ist mit der Addition durch die beiden distributiven Gesetze verbunden, die durch folgende Formeln ausgedrückt werden:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Von diesen zwei letzteren ist keine eine Folge der andern, weil die Multiplikation nicht kommutativ ist.

Um das Produkt $a \cdot t$ der zwei μ-Tettarionen a und t zu bezeichnen, werden wir sagen: a (als Multiplikandus aufgefasst) sei mit t rechtsseitig multipliziert" — oder: „t ist ein rechtsseitiger oder rechtsstehender Multiplikator von a“ — oder: „t ist ein rechtsseitiger oder rechtsstehender Faktor des Produktes aus a und t.“

Ähnlich soll das Produkt $t \cdot a$ durch die Redewendung angedeutet werden: „a ist mit t linksseitig multipliziert“ — oder: „t ist ein linksseitiger oder linksstehender Multiplikator von a“.

Diese aus der Nichtkommutativität der Multiplikation entspringende Verschiedenheit der „linksseitigen“ und der „rechtsseitigen“ Operationen tritt im Laufe der Untersuchung immer wieder auf; sie gibt zu zwei verschiedenen, wenn auch parallel laufenden Zahlentheorien derselben Grössen Anlass.

4. Die zwei μ-Tettarionen a und b heissen „miteinander vertauschbar“, wenn $a \cdot b = b \cdot a$ ist.

Jedes μ-Tettarion ist mit sich selbst, folglich auch, wegen der assoziativen und distributiven Gesetze, mit jeder ganzen rationalen Funktion seiner selbst vertauschbar.

Die wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt folgenden allgemeineren: Jede ganze rationale Funktion $g_1(t)$ eines beliebigen μ-Tettarions t ist mit jeder ganzen rationalen Funktion $g_2(t)$ desselben μ-Tettarions vertauschbar:

$$g_1(t) \cdot g_2(t) = g_2(t) \cdot g_1(t).$$

5. Die links- oder rechtsseitige Multiplikation eines beliebigen μ-Tettarions mit dem Nulltettarion ergibt immer das Nulltettarion wieder; d. h.: *Ein Produkt aus μ-Tettarionen verschwindet, sobald einer der Faktoren Null ist.* — Die Umkehrung dieses Satzes ist aber nicht gültig.

6. Von grundlegender Bedeutung für die Zahlentheorie eines vorgelegten Systemes ist die Frage nach derjenigen Grösse, welche dieselbe Rolle spielt wie die „eins“ in der Theorie der natürlichen Zahlen. Für die μ-Tettarionen wird diese Frage durch die Existenz

der „identischen Substitution“, welche die Variabeln gar nicht ändert, beantwortet. Das dieser identischen Substitution entsprechende μ-Tettarion, nämlich:

$$h = \begin{Bmatrix} 1, 0, 0, \ldots\ldots 0 \\ 0, 1, 0, \ldots\ldots 0 \\ 0, 0, 1, \ldots\ldots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, 0, \ldots\ldots 1 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=\mu} e^{(i,i)}$$

kann als „die Zahl eins“ betrachtet und soll „Haupttettarion“ benannt werden.

Ein μ-Tettarion bleibt ungeändert, wenn man es, links- oder rechtsseitig, mit dem Haupttettarion multipliziert. Man überzeugt sich durch direkte Rechnung von der Richtigkeit dieser Behauptung.

7. Eine gewöhnliche Zahl r werden wir als Spezialfall eines μ-Tettarions ansehen, nämlich als mit dem Haupttettarion verknüpft:

$$r = r \cdot h = h \cdot r = \begin{Bmatrix} r, 0, 0, \ldots . 0, 0 \\ 0, r, 0, \ldots . 0, 0 \\ 0, 0, r, \ldots . 0, 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, 0, \ldots . r, 0 \\ 0, 0, 0, \ldots . 0, r \end{Bmatrix}$$

Umgekehrt soll jedes μ-Tettarion, welches diese spezielle Gestalt besitzt, als „reell“ bezeichnet werden.

Ein reelles μ-Tettarion r ist mit jedem beliebigen μ-Tettarion t vertauschbar $r \cdot t = t \cdot r$. — Den Beweis führt man durch direkte Ausmultiplikation. Dieser Satz stimmt überein mit der in § 2, 1 gegebenen Definition.

Durch diese Eigenschaft werden die reellen Tettarionen auch vollständig charakterisiert, d. h. die Eigenschaft, reelles Tettarion zu sein, ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für ein μ-Tettarion, das mit jedem andern vertauschbar sein soll.

Beweis: Soll das μ-Tettarion $r = \sum_{i,k}^{1\ldots\mu} r_{i,k} \cdot e^{(i,k)}$ mit jedem μ-Tettarion vertauschbar sein, so muss insbesondere $r \cdot a = a \cdot r$ sein, wenn a folgendes μ-Tettarion vorstellt:

$$a = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots\ldots & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 1, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ a_{i,1}, & a_{i,2}, & a_{i,3}, & \ldots\ldots & a_{i,i-1}, & 1, & a_{i,i+1}, & \ldots\ldots & a_{i,\mu} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & 1, & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 1 \end{Bmatrix}$$

Hierbei bedeutet i einen beliebigen, aber bestimmten Wert aus der Reihe $i = 1, 2, \ldots\ldots \mu$; es sind also sämtliche Diagonalkomponenten von a gleich 1, alle übrigen gleich Null mit Ausnahme der in der i^{ten} Zeile stehenden, welche ganz willkürliche Werte haben können. Man bezeichne mit $p = \sum_{i,k}^{1\ldots\mu} p_{i,k} \cdot e^{(i,k)}$ das Produkt aus a und r: $a \cdot r = r \cdot a = p$ und berechne speziell die Komponente $p_{i,i}$, das eine Mal aus dem Produkte $r \cdot a$, das andere Mal aus $a \cdot r$; dies ergibt:

$$p_{i,i} = r_{i,i}$$

$$p_{i,i} = a_{i,1} \cdot r_{1,i} + a_{i,2} \cdot r_{2,i} + \cdots\cdots + a_{i,i-1} \cdot r_{i-1,i} + 1 \cdot r_{i,i} + a_{i,i+1} \cdot r_{i+1,i} + \cdots\cdots + a_{i,\mu} \cdot r_{\mu,i}$$

und aus diesen zwei Gleichungen folgt diese andere:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu}{}' a_{i,\lambda} \cdot r_{\lambda,i} = 0 \qquad (\lambda \neq i)$$

wo das Komma hinter dem Summationszeichen andeuten soll, dass der Wert $\lambda = i$ übersprungen werden muss. Diese letztere Gleichung soll für alle möglichen Werte der $a_{i,\lambda}$ $(\lambda \neq i)$ gelten, trotzdem dieselben linear unabhängig sind; sie reduziert sich somit auf eine Identität, und zieht

$$r_{\lambda,i} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda \neq i \\ i, \lambda = 1, 2, 3, \ldots \mu \end{pmatrix}$$

nach sich, mit andern Worten: es verschwinden alle nicht in der Hauptdiagonale stehenden Komponenten von r, und r muss die Gestalt haben:

$$r = \begin{Bmatrix} r_{1,1}, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & r_{2,2}, & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & r_{\mu,\mu} \end{Bmatrix}$$

Setzt man neuerdings $a \cdot r = r \cdot a = p$ voraus und berechnet die Komponente $p_{i,\lambda}$ jedes dieser Produkte, so findet man einerseits:

$$p_{i,\lambda} = a_{i,\lambda} \cdot r_{\lambda,\lambda}, \text{ anderseits: } p_{i,\lambda} = r_{i,i} \cdot a_{i,\lambda}.$$

Hierbei bedeuten wieder i und λ zwei beliebig gewählte, aber bestimmte Werte aus der Reihe $1, 2, \ldots. \mu$. Da vorige zwei Gleichungen für alle Werte von $a_{i,\lambda}$ gültig bleiben, erschliesst man aus ihnen: $r_{i,i} = r_{\lambda,\lambda}$ $(i, \lambda = 1, 2, \ldots. \mu)$.

Alle Diagonalkomponenten von r sind demnach einander gleich, und r fällt unter die Definition der reellen Tettarionen (§ 2, 7). Von diesen ist somit folgende Eigenschaft erwiesen:

Ein reelles μ-Tettarion, und nur ein solches, ist mit jedem beliebigen μ-Tettarion vertauschbar.

§ 3. Transponierte, adjungierte, konjugierte Tettarionen; Norm eines Tettarions; Charakteristische Gleichung.

1. Bekanntlich gibt es zu jeder linearen Transformation eine „konjugierte" und eine „reziproke". Für uusere Aufgabe wäre es unzweckmässig, diese in der Theorie der linearen Substitutionen üblich gewordenen Ausdrücke in demselben Sinne beizubehalten. Wir wollen vielmehr folgende, an die gebräuchlichen, von Gauss eingeführten Bezeichnungen sich möglichst anschliessenden Benennungen einführen:

Die zwei μ-Tettarionen a und a' sollen „zu einander transponiert" heissen, wenn in ihrem Komponentensystem die i^{te} Zeile des einen genau übereinstimmt mit der i^{ten} Kolonne des andern, und umgekehrt, unter i der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots. \mu$ verstanden.

Das transponierte μ-Tettarion soll stets durch Anbringung eines Accentes angedeutet werden. Ist z. B.

$$t = \begin{vmatrix} t_{1,1}, t_{1,2}, \ldots\ldots t_{1,\mu} \\ t_{2,1}, t_{2,2}, \ldots\ldots t_{2,\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_{\mu,1}, t_{\mu,2}, \ldots\ldots t_{\mu,\mu} \end{vmatrix} \text{ so ist } t' = \begin{vmatrix} t_{1,1}, t_{2,1}, \ldots\ldots t_{\mu,1} \\ t_{1,2}, t_{2,2}, \ldots\ldots t_{\mu,2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_{1,\mu}, t_{2,\mu}, \ldots\ldots t_{\mu,\mu} \end{vmatrix}$$

Das zu a' transponierte μ-Tettarion ist wieder gleich a. Die Eigenschaft zweier Tettarionen, zu einander transponiert zu sein, ist somit eine gegenseitige.

Sind zwei μ-Tettarionen gleich, so gilt dasselbe von den zu ihnen transponierten, d. h. zugleich mit $a = b$ besteht auch immer die Gleichnng $a' = b'$.

Das zu der Summe (bez. Differenz) zweier μ-Tettarionen transponierte ist gleich der Summe (bez. Differenz) der zu den einzelnen Summanden transponierten μ-Tettarionen

$$(a+b)'=a'+b'.$$

Dies folgt aus den in Frage kommenden Definitionen und Sätzen, und wird auch durch direkte Rechnung bestätigt.

Durch direkte Ausrechnung überzeugt man sich, dass

$$(a\cdot b)'=b'\cdot a'.$$

Nach wiederholter Anwendung dieser Gleichung erkennt man:

Das zu einem Produkt aus mehreren Faktoren transponierte μ-Tettarion ist gleich dem Produkte der zu den einzelnen Faktoren transponierten, diese aber in umgekehrter Reihenfolge genommen.

2. Betrachtet man die Komponenten eines beliebigen μ-Tettarions t als Elemente einer Determinante, so bildet das Komponentensystem von t eine Determinante μ^{ten} Grades. Jedes Element $t_{i,k}$ derselben besitzt eine Adjunkte, welche eine Determinante $(\mu-1)^{ten}$ Grades ist und, in üblicher Weise, mit $T_{i,k}$ bezeichnet werden soll. Ersetzt man nun jede der μ^2 Komponenten $t_{i,k}$ von t jeweilen durch ihre Adjunkte $T_{i,k}$, so entsteht aus t ein neues μ-Tettarion, das wir mit T bezeichnen und „zu t adjungiert" nennen wollen.

Auf Grund bekannter Determinanteneigenschaften folgert man hieraus, zunächst für zwei, dann für beliebig viele Faktoren, den Satz:

Das zu einem Produkt aus einer endlichen Anzahl von Faktoren adjungierte μ-Tettarion ist gleich dem Produkte aus den zu den einzelnen Faktoren adjungierten.

Ist $t=a\cdot b\cdot c\cdot\ldots\ldots m$, so ist $T=A\cdot B\cdot C\cdot\ldots\ldots M$.

3. Betrachtet man ein beliebiges μ-Tettarion a, so ist das transponierte seines adjungierten gleich dem adjungierten seines transponierten, nämlich A'. Dieses A' soll „zu a konjugiert" heissen.

Aus dieser Definition ergibt sich: sind zwei μ-Tettarionen einander gleich, so gilt dasselbe von den zu ihnen konjugierten; von den zwei Gleichungen $a=b$ und $A'=B'$ ist die zweite stets eine Folge der ersten, obgleich das Umgekehrte nicht immer zutrifft.

Ferner fliessen aus elementaren Eigenschaften der Determinanten unmittelbar folgende Sätze:

Das zu dem Produkt aus einer endlichen Anzahl von Faktoren konjugierte μ-Tettarion ist gleich dem Produkt aus den zu den einzelnen Faktoren konjugierten μ-Tettarionen, aber in umgekehrter Reihenfolge genommen. Ist also $a\cdot b=t$, so ist $T'=B'\cdot A'$.



Für eine Summe von μ-Tettarionen gilt, im allgemeinen wenigstens, ein ähnlicher Satz nicht, auch schon dann nicht, wenn an Stelle der konjugierten die adjungierten μ-Tettarionen betrachtet werden. Für $s = a + b$ ist im allgemeinen $S' \neq A' + B'$.

Gleichzeitig mit a und b sind auch die adjungierten A und B, die transponierten a' und b', die konjugierten A' und B' miteinander vertauschbar.

4. Jedes μ-Tettarion ist mit seinem konjugierten vertauschbar.

$$a \cdot A' = A' \cdot a.$$

Das Produkt aus einem beliebigen μ-Tettarion a und seinem konjugierten A' ist ein reelles μ-Tettarion.

Dies Produkt ist somit eindeutig bestimmt und kann stets als reelle Zahl aufgefasst werden; man nennt es „die Norm von a", Bezeichnung; $N(a)$

$$N(a) = a \cdot A' = A' \cdot a.$$

Die Norm eines μ-Tettarions, als reelle Zahl aufgefasst, hat denselben Wert wie die Determinante seines Komponentensystems:

$$N(a) = \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2} \ldots\ldots a_{1,\mu} \\ a_{2,1}, a_{2,2} \ldots\ldots a_{2,\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{\mu,1}, a_{\mu,2} \ldots\ldots a_{\mu,\mu} \end{vmatrix}$$

Transponierte μ-Tettarionen haben somit gleiche Norm. *Die Norm eines Produktes aus mehreren Faktoren ist gleich dem Produkte aus den Normen der einzelnen Faktoren.*

Der Beweis dieses Satzes lässt sich, auf Grund der vorangehenden, für ein Produkt aus zwei Faktoren direkt geben, da $N(a\,b) = (a\,b) \cdot (A \cdot B)' = a \cdot b \cdot B' \cdot A' = a \cdot N(b) \cdot A' = N(b) \cdot a \cdot A' = N(b) \cdot N(a)$.

Durch den Schluss der vollständigen Induktion kann er dann als allgemein gültig nachgewiesen werden. Auf die Reihenfolge der Normen als Faktoren kommt es dabei nicht an, denn sie besitzen kommutative Multiplikation.

5. Betrachtet man das zum beliebigen μ-Tettarion t adjungierte T, und bildet man von T selbst das adjungierte $\bar{t}$, so folgt unmittelbar aus bekannten Determinanteneigenschaften, dass jede einzelne Komponente $\bar{t}_{i,k}$ von $\bar{t}$ gleich ist der entsprechenden Komponente $t_{i,k}$ des ursprünglichen μ-Tettarions t multipliziert mit $[N(t)]^{\mu-2}$.

Unter Berücksichtigung von § 2, 1 kann man also folgenden Satz aussprechen:

Das konjugierte des konjugierten ist gleich dem adjungierten des adjungierten, nämlich gleich dem ursprünglichen μ-Tettarion multipliziert mit der $(\mu - 2)^{ten}$ *Potenz seiner Norm.*

Hieraus ergibt sich weiter:

$$N(T') = T' \cdot \bar{t} = T' \cdot t \cdot [N(t)]^{\mu - 2} = [N(t)]^{\mu - 1} \quad \text{d. h.:}$$

Die Norm des zu t konjugierten ist gleich der Norm des zu t adjungierten μ-Tettarions, nämlich gleich der $(\mu - 1)^{ten}$ *Potenz der Norm von t.*

$$N(T') = N(T) = N^{\mu - 1}(t).$$

6. Sehr einfach gestalten sich diese Verhältnisse bei Düotettarionen ($\mu = 2$): Aus einem Düotettarion a leitet man das konjugierte A' dadurch ab, dass man erste und vierte Komponente gegen einander umtauscht und zugleich die zweite und dritte mit negativem Vorzeichen versieht.

$$\text{Für } a = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{Bmatrix} \text{ ist } A' = \begin{Bmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{Bmatrix}$$

Hierauf beruhen folgende, ebenfalls nur für $\mu = 2$ geltenden Eigenschaften: Konjugierte Düotettarionen haben gleiche Norm; die Eigenschaft zweier Düotettarionen, zu einander konjugiert zu sein, ist eine gegenseitige.

Bei Düotettarionen ist nicht nur das Produkt, sondern auch die Summe von zwei konjugierten reell.

Aus den soeben aufgeschriebenen Ausdrücken für a und A' ergibt sich in der Tat:

$$a \cdot A' = N(a) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$a + A' = (a_{11} + a_{22}) \begin{Bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{Bmatrix} = a_{11} + a_{22}.$$

Aus dieser letzten Gleichung zieht man: $A' = (a_{11} + a_{22}) - a$ und dies in die vorletzte eingesetzt, ergibt:

$$a \cdot A' = a\,[(a_{11} + a_{22}) - a] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \quad \text{oder}$$

$$a^2 - (a_{11} + a_{22})\, a + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0.$$

Diese Gleichung führt den Namen „charakteristische Gleichung". Sie lässt sich folgendermassen in Gestalt einer verschwindenden Determinante schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - a \end{vmatrix} = 0.$$

Somit ist nachgewiesen, dass jedes Düotettarion eine „charakteristische Gleichung" zweiten Grades mit reellen Koeffizienten be-

friedigt. Mit ihrer Hülfe lässt sich eine beliebige ganze rationale Funktion eines Düotettarions vom n^{ten} Grade auf den ersten Grad reduzieren.

7. Für den Fall eines beliebigen μ haben mehrere Autoren die Existenz einer „charakteristischen Gleichung" nachgewiesen. (v. Frobenius.)

Es sei hier nur das in die Sprache der μ-Tettarionen übersetzte Resultat angeführt:

Jedes μ-Tettarion t erfüllt eine „charakteristische Gleichung" μ^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten, der man folgende Gestalt geben kann:

$$\begin{vmatrix} t_{11}-t, & t_{12}, & t_{13}, & \ldots\ldots & t_{1,\mu} \\ t_{21}, & t_{22}-t, & t_{23}, & \ldots\ldots & t_{2,\mu} \\ t_{31}, & t_{32}, & t_{33}-t, & \ldots\ldots & t_{3,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{\mu,1}, & t_{\mu,2}, & t_{\mu,3}, & \ldots\ldots & t_{\mu,\mu}-t \end{vmatrix} = 0.$$

Mit ihrer Hülfe lässt sich jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades des μ-Tettarions t, sobald $n \geqq \mu$, auf den Grad $(\mu - 1)$ reduzieren.

§ 4. Nullteiler; Reziproke Tettarionen; Division bei Tettarionen; Diagonaltettarionen.

1. Ein μ-Tettarion t, dessen Norm den Wert Null hat, heisst „ein Nullteiler", und zwar „echter Nullteiler", wenn es nicht gleich dem Nulltettarion ist. Die Null ist der einzige „unechte Nullteiler".

Jedes Produkt, in welchem ein Nullteiler als Faktor auftritt, ist selbst wieder ein Nullteiler (§ 3, 4).

Der in § 2, 5 formulierte Satz lässt sich folgendermassen umkehren: Verschwindet ein Produkt aus μ-Tettarionen, so ist entweder mindestens einer der Faktoren unechter Nullteiler, oder es treten mindestens zwei echte Nullteiler als Faktoren auf.

2. Ist t nicht Nullteiler, so versteht man unter dem „reziproken μ-Tettarion von t" das μ-Tettarion

$$t^{-1} = \frac{T'}{N(t)}$$

Das zu t reziproke μ-Tettarion t^{-1} erfüllt die Gleichungen:

$$t \cdot t^{-1} = t^{-1} \cdot t = h = 1.$$

Die Norm des reziproken μ-Tettarions ist gleich dem reziproken Werte der Norm des ursprünglichen μ-Tettarions; denn

$$N(t) \cdot N(t^{-1}) = N(t \cdot t^{-1}) = N(1) = 1.$$

3. Bedeuten a und b zwei μ-Tettarionen von nicht verschwindender Norm, so existieren zwei je eindeutig bestimmte zu ihnen reziproke μ-Tettarionen a^{-1} und b^{-1}. Aus den Gleichheiten

$$a b \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a \cdot h \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = h = 1$$

folgt die Beziehung: $(a b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, die sich leicht auf beliebig viele Faktoren verallgemeinern lässt; sie besagt: *Ist ein Produkt aus einer endlichen Anzahl von Faktoren nicht Nullteiler, so ist das zum Produkt reziproke μ-Tettarion gleich dem Produkte der zu den einzelnen Faktoren reziproken, aber in umgekehrter Reihenfolge genommen.*

Da das Haupttettarion h, wie übrigens jedes reelle, mit seinem transponierten identisch ist, so folgt unter Berücksichtigung von § 3, 1 aus den Gleichheiten: $a' \cdot (a')^{-1} = h = 1$, und:

$$(a^{-1} \cdot a)' = a' \cdot (a^{-1})' = h' = h = 1 \text{ die Beziehung:}$$
$$(a^{-1})' = (a')^{-1}$$

d. h.: Für jedes μ-Tettarion a von nicht verschwindender Norm ist das transponierte seines reziproken gleich dem reziproken seines transponierten.

Aus den aufgestellten Definitionen folgt weiter:

$$(A')^{-1} = \frac{a \cdot [N(a)]^{\mu-2}}{N(A')} = \frac{a \cdot [N(a)]^{\mu-2}}{[N(a)]^{\mu-1}} = \frac{a}{N(a)} = a \cdot \frac{1}{N(a)}; \text{ in Worten:}$$

Das reziproke des konjugierten ist gleich dem ursprünglichen μ-Tettarion multipliziert mit dem reziproken Werte seiner Norm, wenn dieselbe nicht Null ist.

Aus der ersten der in 2 angeführten Eigenschaften ergibt sich $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1$, oder, nach rechtsseitiger Multiplikation mit a:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

in Worten: *Das reziproke des reziproken ist gleich dem ursprünglichen μ-Tettarion; die Eigenschaft zweier μ-Tettarionen, zu einander reziprok zu sein, ist eine gegenseitige.*

4. Unter t^{-n} soll die n^{te} Potenz des μ-Tettarions t^{-1} verstanden werden:

$$t^{-n} = \left[\frac{T'}{N(t)}\right]^n.$$

Aus Analogiegründen mit der Theorie der rationalen Zahlen setzen wir die null^{te} Potenz eines μ-Tettarions a, welches nicht Nullteiler ist, gleich dem Haupttettarion:

$$a^0 = h = 1, \text{ wenn } N(a) \neq 0.$$

Durch diese Festlegungen sind nun auch die Tettarionspotenzen mit ganzzahligen negativen Exponenten in eindeutiger Weise definiert. Wie man leicht übersieht, unterliegen sie denselben Rechnungsregeln, wie diejenigen mit positiven ganzzahligen Exponenten.

5. Versteht man unter a und b zwei vertauschbare μ-Tettarionen, von denen das letztere nicht Nullteiler ist, so ergeben sich bei Berücksichtigung von $a \cdot b = b \cdot a$ folgende Gleichheiten:

$$a \cdot b^{-1} = (b^{-1} \cdot b) \cdot (a \cdot b^{-1}) = b^{-1} \cdot (b \cdot a) \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot b^{-1}$$
$$= b^{-1} \cdot a \cdot (b \cdot b^{-1}) = b^{-1} \cdot a \cdot 1 = b^{-1} \cdot a$$

d. h. a ist auch mit b^{-1} vertauschbar. Unter diesen Voraussetzungen kann man schreiben:

$$a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a = \frac{a}{b} \tag{1}$$

und auf diese Weise den „Quotienten von zwei vertauschbaren μ-Tettarionen“ definieren.

Sind beide μ-Tettarionen nicht Nullteiler, so existiert auch der Quotient $\frac{b}{a}$; dann ist, wie man aus der Definitionsgleichung (1) einsieht:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Das zum Quotienten zweier vertauschbarer μ-Tettarionen transponierte ist gleich dem Quotienten der transponierten μ-Tettarionen; denn aus der Definitionsgleichung (1) folgt

$$\text{einerseits: } \left(\frac{a}{b}\right)' = (a \cdot b^{-1})' = (b^{-1})' \cdot a' = (b')^{-1} \cdot a'$$

$$\text{anderseits: } \left(\frac{a}{b}\right)' = (b^{-1} \cdot a)' = a' \cdot (b^{-1})' = a' \cdot (b')^{-1}$$

$$\text{also: } a' \cdot (b')^{-1} = (b')^{-1} \cdot a' = \frac{a'}{b'}.$$

Der soeben aufgestellte Satz bleibt richtig, wenn „transponiert“ ersetzt wird durch „adjungiert“, oder durch „konjugiert“, oder durch „reziprok“. Es ergibt sich dies aus bisher aufgestellten Definitionen und Sätzen.

6. Bedeuten a und b zwei nicht vertauschbare μ-Tettarionen, von denen das letztere b nicht Nullteiler ist, so kann man zwei im allgemeinen voneinander verschiedene Quotienten x und y des μ-Tettarions a durch das μ-Tettarion b definieren, je nachdem nämlich $a = x \cdot b$, oder $a = b \cdot y$ sein soll.

Im ersten Falle soll x „der linksseitige Quotient von a durch b“ heissen:

$$x = a \cdot b^{-1} = \frac{a \cdot B'}{N(b)}.$$

Im zweiten Falle möge y „rechtsseitiger, oder rechtsstehender Quotient von a durch b“ genannt werden.

$$y = b^{-1} \cdot a = \frac{B' \cdot a}{N(b)}.$$

Das Zeichen des Quotienten $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot B'}{N(b)}$ ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn a und B' miteinander vertauschbar sind, und soll auch nur in diesem Falle angewandt werden.

Sobald der Divisor b nicht Nullteiler ist, sind beide Arten von Divisionen möglich, und die entsprechenden Quotienten eindeutig bestimmt. Bedeutet aber b einen Nullteiler, so ist die Division durch b entweder unmöglich, oder der Quotient unbestimmt; dieser letztere Fall tritt ein, wenn das Produkt $a \cdot B'$ [bezw. $B'a$] verschwindet.

7. Durch die vorhergehenden Festsetzungen sind nun auch die gebrochenen rationalen Funktionen von μ-Tettarionen unzweideutig definiert. Sie haben, unter Zugrundelegung dieser Festsetzungen, im allgemeinen nur dann Sinn, wenn die Norm des Nenners nicht verschwindet. Jede solche Funktion von μ-Tettarionen $a, b, \ldots . m$ ist ein gewisses μ-Tettarion $R(a, b, \ldots . m)$. Dasselbe lässt sich, vermöge der charakteristischen Gleichung (§ 3, 7), als ganze rationale Funktion von $a, b, \ldots . m$ mit reellen Koeffizienten und höchstens vom Grade $(\mu - 1)$ darstellen.

Aus dem soeben Gesagten und aus § 2, 4 folgt:

Jede rationale Funktion eines μ-Tettarions t ist mit jeder rationalen Funktion desselben μ-Tettarions vertauschbar:

$$R_1(t) \cdot R_2(t) = R_2(t) \cdot R_1(t).$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall des allgemeineren:

Sind zwei μ-Tettarionen von nicht verschwindender Norm miteinander vertauschbar, so ist es auch jede rationale Funktion des einen mit jeder rationalen Funktion des andern.

8. Eine hervorragende Rolle spielen diejenigen μ-Tettarionen, deren Komponentensystem ausserhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen aufweist. Diese ausgezeichneten μ-Tettarionen sollen „Diagonal-μ-Tettarionen“ heissen, z. B.:

$$d = \left\{ \begin{matrix} d_{11}, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & d_{22}, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & 0, & d_{33} & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & d_{\mu,\mu} \end{matrix} \right\}$$

Die Gesamtheit der Diagonal-μ-Tettarionen bildet, innerhalb des Bereiches aller μ-Tettarionen, ein „Hypotettarionensystem mit nur μ Haupteinheiten"; d. h.: 1) die Elemente dieses Untersystemes reproduzieren sich durch die vier rationalen Operationen; 2) das Untersystem enthält zugleich mit d stets auch das konjugierte D'.

Jedes Diagonal-μ-Tettarion ist mit jedem Diagonal-μ-Tettarion vertauschbar; die Diagonaltettarionen sind somit durch kommutative Multiplikation ausgezeichnet, was man bei direkter Rechnung leicht überblickt.

Die Norm eines Diagonaltettarions ist gleich dem Produkte aus seinen Diagonalkomponenten.

Kapitel II.
Die ganzen Tettarionen.

§ 5. Tettarionenkörper; Substitution, Permutation, Inversion eines Körpers. Das Inversionsprinzip.

1. Ein System $\{K\}$ von unendlich vielen μ-Tettarionen t heisst „ein Körper", wenn die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten irgendwelcher μ-Tettarionen aus $\{K\}$ wieder demselben System angehören. — Die Tettarionen eines Körpers reproduzieren sich demnach durch die vier rationalen Operationen.

Das nächstliegende Beispiel eines Körpers liefert der Körper Ω, welcher die Gesamtheit aller möglichen μ-Tettarionen umfasst.

2. Liegt ein System $\{T\}$ von beliebigen Tettarionen t vor, und wird jedes Tettarion desselben nach einem gewissen Gesetze durch ein bestimmtes, ihm entsprechendes $f(t)$ ersetzt, das in $\{T\}$ enthalten sein kann oder auch nicht, so nennt man ein solches Gesetz „eine Abbildung" oder „eine Substitution". Sie möge durch $\big(t, f(t)\big)$ bezeichnet werden. — Durch die Substitution $\big(t, f(t)\big)$ geht das Tettarion t in $f(t)$, das ganze System $\{T\}$ in ein System $\{\overline{T}\}$ über, welches „Bild des Systems $\{T\}$" heisst; ebenso wird $f(t)$ als „Bild von t" bezeichnet.

3. Diesen Begriff der Substitution oder Abbildung wenden wir auf einen beliebigen Tettarionenkörper $\{K\}$ an. Bedeutet a jedes μ-Tettarion desselben, so möge a durch eine gewisse Substitution in sein Bild $\bar{a}$ übergeführt werden. Wir fragen nun, ob es unter den unendlich vielen Substitutionen solche gibt, die sich durch folgende Eigenschaft vor andern auszeichnen: alle möglichen zwischen den μ-Tettarionen a bestehenden Beziehungen rationaler Natur sollen sich vollständig auf die entsprechenden Tettarionen $\bar{a}$ übertragen. Wenn also aus beliebigen μ-Tettarionen $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots. a^{(n)}$ des Körpers $\{K\}$

durch ausschliessliche Anwendung der rationalen Operationen ein μ-Tettarion $a = R(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots . a^{(n)})$ abgeleitet ist, dann soll, wenn genau dieselben rationalen Operationen auf die entsprechenden Tettarionen $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \ldots \bar{a}^{(n)}$ angewandt werden, stets auch das dem a entsprechende Bild $\bar{a} = R(\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \ldots . \bar{a}^{(n)})$ entstehen. Eine solche ausgezeichnete Substitution heisst „eine Permutation“ des Körpers $\{K\}$.

Ordnet man jedem μ-Tettarion a eines Körpers nach einem bestimmten Gesetze ein Tettarion $f(a)$ zu, so heisst die Substitution $\big(a, f(a)\big)$ „eine Permutation des Körpers“, wenn durch Anwendung dieser Substitution jede rationale Gleichung zwischen μ-Tettarionen des Körpers in eine richtige Gleichung übergeht.

Da die Subtraktion eines Tettarions auf Addition des entgegengesetzten, und die Division durch ein Tettarion a auf Multiplikation mit $\frac{A'}{N(a)}$ hinauskommt, wenn von einem bestimmten Quotienten überhaupt die Rede sein kann, da anderseits jede rationale Operation sich aus einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen zusammensetzt, so leuchtet folgendes ein:

Die Substitution $\big(a, f(a)\big)$ ist stets und nur dann eine Permutation des Körpers $\{K\}$, wenn die Tettarionen $f(a)$ nicht sämtlich Null sind und ferner die beiden Gleichungen bestehen:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

unter a und b zwei beliebige μ-Tettarionen des Körpers $\{K\}$ verstanden.

Durchläuft a alle μ-Tettarionen eines Körpers, so bildet die Gesamtheit der Tettarionen $f(a)$ wiederum einen Körper.

4. Neben den soeben definierten Permutationen hat man hier, wie überhaupt in Körpern bei Zahlsystemen mit nicht kommutativer Multiplikation, noch eine andere Art von Substitutionen oder Abbildungen zu betrachten, welche nach Hurwitz „Inversionen“ genannt werden (v. dessen „Zahlentheorie der Quaternionen“ § 1).

Bedeutet t jedes μ-Tettarion eines Körpers, so soll die Substitution $\big(t, f(t)\big)$ „eine Inversion des Körpers“ heissen, wenn die Tettarionen $f(t)$ nicht sämtlich Null sind und ferner, für je zwei μ-Tettarionen a und b des Körpers, die Gleichungen gelten:

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$
$$f(a \cdot b) = f(b) \cdot f(a).$$

Aus § 3, 1 folgt, dass die Substitution (t, t') wo t' das zu t transponierte μ-Tettarion bedeutet, eine Inversion ist. Man erkennt nun ohne weiteres:

Wenn $\big(a, f(a)\big)$ *die allgemeinste Permutation eines Körpers vorstellt, so ist* $\big(a, f(a')\big)$ *die allgemeinste Inversion desselben Körpers.*

5. Bedeutet q irgend ein Tettarion von nicht verschwindender Norm, das dem Körper $\{K\}$ angehören kann oder auch nicht, so heissen die zwei Permutationen $\big(a, f(a)\big)$ und $\big(a, q \cdot f(a) \cdot q^{-1}\big)$ „äquivalent“. Man übersieht sofort, dass die Eigenschaft zweier Permutationen, äquivalent zu sein, eine gegenseitige ist; ferner, dass zwei derselben dritten äquivalente Permutationen auch untereinander äquivalent sind.

Es lassen sich demnach die verschiedenen Permutationen eines Körpers in Klassen einteilen nach dem Prinzipe, dass zwei Permutationen in dieselbe Klasse geworfen werden oder nicht, je nachdem sie einander äquivalent sind oder nicht; und so entsteht die Frage: wie viele von einander verschiedene Klassen nicht äquivalenter Permutationen besitzt ein vorgelegter Tettarionenkörper?

Entsprechende Definitionen und Sätze lassen sich bezüglich der Inversionen eines Körpers aufstellen.

Für den aus der Gesamtheit aller möglichen μ-Tettarionen bestehenden Körper Ω hat man jedenfalls die folgenden Permutationen:

Ordnet man irgend einem μ*-Tettarion* a *das* μ*-Tettarion* $t \cdot a \cdot t^{-1}$ *zu, unter* t *ein beliebiges* μ*-Tettarion von nicht verschwindender Norm verstanden, so ist hierdurch eine Permutation des Körpers* Ω *definiert.*

Dies lehren die Gleichungen:

$$t \cdot (a + b) \cdot t^{-1} = t \cdot a \cdot t^{-1} + t \cdot b \cdot t^{-1}, \text{ d. h.: } f(a + b) = f(a) + f(b).$$

$$t \cdot (a \cdot b) \cdot t^{-1} = t \cdot a \cdot (t^{-1} \cdot t) \cdot b \cdot t^{-1} = (t \cdot a \cdot t^{-1}) \cdot (t \cdot b \cdot t^{-1}),$$

$$\text{d. h.: } f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

Dieses Zuordnungsgesetz stellt auch für einen beliebigen μ-Tettarionenkörper eine Permutation dar, wie aus seinem Beweise direkt ersichtlich ist. Dasselbe folgt auch aus dem Umstande, dass jeder Tettarionenkörper ein Unterkörper von Ω ist. — Entsprechend werden durch $(a, t \cdot a' \cdot t^{-1})$ Körperinversionen definiert.

6. Das Inversionsprinzip. Von Wichtigkeit für die weiteren Untersuchungen wird folgender Umstand sein:

Ordnet man jedem Tettarion t eines beliebigen Systemes sein transponiertes t' zu, so geht dadurch rechtsseitige Multiplikation und Division in linksseitige über, und umgekehrt; sonst aber bleiben alle rationalen Beziehungen zwischen Tettarionen des Systemes unverändert bestehen. — Diese Tatsache wollen wir kurz „das Inversionsprinzip“ nennen. Seine Richtigkeit beruht darauf, dass durch die Abbildung (t, t') eine Inversion definiert ist.

§ 6. Rationale und ganze Tettarionen; Teilbarkeit; Einheits-μ-Tettarionen.

Ein μ-Tettarion möge „rational" heissen, wenn seine sämtlichen μ^2 Komponenten gewöhnliche rationale Zahlen sind. — Die Gesamtheit aller rationalen μ-Tettarionen bildet einen Körper $\{R\}$. Allgemein bilden die μ-Tettarionen, deren Komponenten irgend einem algebraischen Zahlenkörper entnommen sind, einen Tettarionenkörper. Unter diesen ist der Körper $\{R\}$ der einfachste. Alle weiteren Untersuchungen werden sich ausschliesslich auf ihn beziehen, und von jetzt ab ist unter „Tettarion" schlechthin immer ein solches mit rationalen Komponenten zu verstehen.

Wir gehen dazu über, die Zahlentheorie des Körpers $\{R\}$ darzustellen. Der erste hierzu notwendige Schritt besteht darin, die betreffenden Tettarionen in „ganze" und „gebrochene" zu scheiden.

2. Ein rationales μ-Tettarion heisst „ganz", wenn seine sämtlichen Komponenten rationale ganze Zahlen sind.

Zu dieser Definition hat folgender Satz geführt:

Der grösste endliche Integritätsbereich, der die μ^2 Haupteinheiten $e^{(i,k)}$ $(i,k = 1, 2, \dots \mu)$ sämtlich enthält, hat die Basis $[e^{(1,1)}, e^{(1,2)}, \dots e^{(i,k)} \dots e^{(\mu,\mu)}]$.

Der etwas weitläufige, keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietende Beweis wird der Kürze halber hier unterdrückt.

Gleichzeitig mit einem μ-Tettarion g sind auch: sein transponiertes g', sein adjungiertes G, sein konjugiertes G' ganz.

Die Norm eines ganzen μ-Tettarions ist eine rationale ganze Zahl; das umgekehrte trifft hier nicht immer zu.

3. Der nächste Schritt zur Begründung der Zahlentheorie des Körpers $\{R\}$ wird die Lösung der Frage nach den „Einheiten" dieses Systemes sein. Nun wird eine „Einheit" immer dadurch charakterisiert, dass sie in jeder „ganzen Zahl" aufgeht; demnach ist zunächst der Begriff der „Teilbarkeit" zu formulieren, und auch hier sind eine rechtsseitige und eine linksseitige Teilbarkeit wohl zu unterscheiden.

Das ganze μ-Tettarion $a = \sum_{i,k}^{1\dots\mu} a_{i,k} \cdot e^{(i,k)}$ heisst „durch das ganze μ-Tettarion $b = \sum_{i,k}^{1\dots\mu} b_{i,k} \cdot e^{(i,k)}$ rechtsseitig teilbar [bezw. linksseitig teilbar]", wenn die Gleichung $a = c \cdot b$ [bezw. $a = b \cdot c$] durch ein passend gewähltes ganzes μ-Tettarion $c = \sum_{i,k}^{1\dots\mu} c_{i,k} \cdot e^{(i,k)}$ befriedigt werden kann.

Es soll dann auch b „ein rechtsseitiger oder rechtsstehender [bezw. linksseitiger oder linksstehender] Divisor oder Teiler von a“ genannt werden.

Wenn der Divisor b nicht Nullteiler ist, lässt sich dieses ganze μ-Tettarion c eindeutig bestimmen als

$$c = a \cdot b^{-1} \qquad [\text{bez. } c = b^{-1} \cdot a]. \tag{1}$$

Bedeutet der Devisor b einen ganzen Nullteiler, so hat die Gleichung $a = c \cdot b$ in ganzen μ-Tettarionen nur dann angebbare Lösungen, wenn auch a Nullteiler ist. Insbesondere hat dann die Gleichung $o = c \cdot b$ die unendlich vielen Lösungen: $c = g \cdot B'$, unter g ein beliebiges ganzes μ-Tettarion verstanden. Auf diesen Umstand kann die Bezeichnung „Nullteiler“ zurückgeführt werden. — Ganz entsprechende Betrachtungen kann man an die Gleichung $a = b \cdot c$ anknüpfen.

In Analogie mit der rationalen Zahlentheorie sollen, neben den genannten Bezeichnungen, auch die Redewendungen gebraucht werden: „a ist durch b rechtsseitig [bezw. linksseitig] teilbar“, oder: „b geht rechtsseitig [bezw. linksseitig] in a auf.“

4. Das ganze μ-Tettarion b ist stets und nur dann ein rechtsseitiger [bezw. linksseitiger] Divisor von a, wenn $a \cdot b^{-1}$ [bzw. $b^{-1} \cdot a$] ganz ist, wie Gleichung (1) lehrt. Soll nun das ganze μ-Tettarion ε in jedem andern rechtsseitig aufgehen, so muss $g \cdot \varepsilon^{-1}$ für ein beliebiges ganzes μ-Tettarion g, insbesondere für $g = 1$, ganz sein; d. h: es muss $\varepsilon^{-1} = \frac{E'}{N(\varepsilon)}$ ganz sein. Dann ist aber auch $\varepsilon^{-1} \cdot g$ ganz, und ε geht dann auch linksseitig in jedem ganzen μ-Tettarion auf. — Ein solches ganzes μ-Tettarion ε, welches von jedem ganzen μ-Tettarion g sowohl rechts- als auch linksseitiger Divisor ist, heisst „Einheits-μ-Tettarion“.

Um alle möglichen Einheits-μ-Tettarionen zu bestimmen, hat man nach vorigem diejenigen ganzen μ-Tettarionen ε zu suchen, für welche gleichzeitig mit ε auch ε^{-1} ganz ist; dann muss jedenfalls gleichzeitig mit $N(\varepsilon)$ auch $N(\varepsilon^{-1}) = \frac{1}{N(\varepsilon)}$ eine ganze Zahl, d. h. $N(\varepsilon) = \pm 1$ sein (§ 6, 2 und § 4, 2). Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend, denn bei dieser Voraussetzung ist $\varepsilon^{-1} = \frac{E'}{N(\varepsilon)} = \pm E'$, also $\varepsilon^{-1} \cdot g$ und $g \cdot \varepsilon^{-1}$ ein ganzes μ-Tettarion, somit ε ein Einheits-μ-Tettarion, weil in jedem andern aufgehend.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein ganzes μ-Tettarion ε ein Einheits-μ-Tettarion sei, lautet demnach: $N(\varepsilon) = \pm 1$.

Diese eine Beziehung zwischen μ^2 Unbestimmten $\varepsilon_{i,k}$ lässt unendlich viele Lösungen zu; anders ausgedrückt besagt dies:

Im Bereiche der ganzen μ-Tettarionen gibt es unendlich viele Einheits-μ-Tettarionen.

Man unterscheidet:
„eigentliche Einheitstettarionen“, wenn $N(\varepsilon) = +1$,
„uneigentliche Einheitstettarionen“, deren Norm gleich -1 ist.

§ 7. Benachbarte; reduzierte; äquivalente Tettarionen.

1. Das Inversionsprinzip (§ 5, 6) gestattet hier, Wiederholungen zu vermeiden. Der bequemeren und kürzeren Ausdrucksweise halber werden wir nur die eine der beiden parallel laufenden Zahlentheorien berücksichtigen, etwa die linksseitige. Da es sich ausschliesslich um rationale Operationen handelt, gelten aber, dem Inversionsprinzipe zufolge, alle Betrachtungen auch für die rechtsseitige Zahlentheorie; man hat nur die zwei Indices der Komponenten, ferner „links ...“ mit „rechts ...“ und „Kolonne“ mit „Zeile“ zu vertauschen, und umgekehrt.

Endlich sei vorausgeschickt, dass i, $\varkappa$, λ, ϱ stets irgend welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots\ldots \mu$ vorstellen.

2. Bedeutet $h = \sum_{i=1}^{i=\mu} e^{(i,i)}$ das Haupttettarion und $\alpha^{(\lambda,\varkappa)}$ die Summe

$$\alpha^{(\lambda,\varkappa)} = h + e^{(\lambda,\varkappa)}$$

so ist für beliebige ganzzahlige Werte von r (positiv, Null oder negativ)

$$[\alpha^{(\lambda,\varkappa)}]^r = h + r \cdot e^{(\lambda,\varkappa)}$$

wie man aus direkter Rechnung und durch vollständigen Induktionsschluss von n auf $(n+1)$ ohne Mühe erschliesst; z. B.:

$$[\alpha^{(2,4)}]^r = \left\{\begin{array}{l} 1, 0, 0, 0, 0 \;\ldots\ldots\; 0, 0 \\ 0, 1, 0, r, 0 \;\ldots\ldots\; 0, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0 \;\ldots\ldots\; 0, 0 \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ 0, 0, 0, 0, 0 \;\ldots\ldots\; 1, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \;\ldots\ldots\; 0, 1 \end{array}\right\}$$

Man beachte nun folgendes: Das Produkt $[\alpha^{(i,\varkappa)}]^r \cdot t$ erhält man aus t, indem man zu jeder Komponente der i^{ten} Zeile des Komponentensystems von t die mit r multiplizierte entsprechende Komponente der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile addiert, alle andern Komponenten von t aber durchaus ungeändert lässt; z. B.:

$$[\alpha^{(2,4)}]^r \cdot t = \begin{Bmatrix} 1, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots 0 \\ 0, 1, 0, r, 0, \ldots\ldots 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_{1,1}, & t_{1,2}, & \ldots\ldots & t_{1,\mu} \\ t_{2,1}, & t_{2,2}, & \ldots\ldots & t_{2,\mu} \\ t_{3,1}, & t_{3,2}, & \ldots\ldots & t_{3,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{\mu,1}, & t_{\mu,2}, & \ldots\ldots & t_{\mu,\mu} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} t_{11}, & t_{12}, & \ldots\ldots & t_{1,\mu} \\ t_{21} + r \cdot t_{41}, & t_{22} + r \cdot t_{42}, & \ldots\ldots & t_{2,\mu} + r \cdot t_{4,\mu} \\ t_{31}, & t_{32}, & \ldots\ldots & t_{3,\mu} \\ t_{41}, & t_{42}, & \ldots\ldots & t_{4,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{\mu,1}, & t_{\mu,2}, & \ldots\ldots & t_{\mu,\mu} \end{Bmatrix}.$$

3. Ist g ein beliebiges ganzes μ-Tettarion, so soll

$$g^{(r)} = [\alpha^{(\lambda,\varkappa)}]^r \cdot g \qquad (\text{bezw.: } g \cdot [\alpha^{(\lambda,\varkappa)}]^r)$$

„zu g nach links benachbart" (bezw. „zu g nach rechts benachbart") heissen. Von Wichtigkeit ist folgender Hülfssatz:

Bedeutet $t = \sum_{\iota,\varkappa}^{1\ldots\mu} t_{\iota,\varkappa} \cdot e^{(\iota,\varkappa)}$ *ein beliebiges ganzes μ-Tettarion, so gibt es unter den unendlich vielen zu t nach links benachbarten μ-Tettarionen*

$$t^{(r)} = [\alpha^{(\iota,\lambda)}]^r \cdot t$$

stets eines von der Eigenschaft, dass eine beliebig vorgeschriebene seiner Komponenten, z. B. $t^{(r)}_{\iota,\varkappa}$, *nicht negativ, aber kleiner ist, als der absolute Betrag irgend einer in derselben $\varkappa^{\text{ten}}$ Kolonne stehenden und nicht verschwindenden Komponente von t, z. B. als* $|t_{\lambda,\varkappa}|$.

Es kann nämlich über die ganze Zahl r so verfügt werden, dass

$$0 \leqq t^{(r)}_{\iota,\varkappa} = t_{\iota,\varkappa} + r \cdot t_{\lambda,\varkappa} < |t_{\lambda,\varkappa}| \quad \text{wird.}$$

4. Die μ-Tettarionen, deren Komponentensystem links [bezw. rechts] von der Hauptdiagonale lauter Nullen aufweist, spielen eine besonders wichtige Rolle und mögen deswegen mit einem besondern Namen belegt und „linksseitig reduziert" [bezw. „rechtsseitig reduziert"] genannt werden. Sie bilden einen Unterkörper im Körper der μ-Tettarionen, denn sie reproduzieren sich durch die vier rationalen Operationen, auch dann, wenn ihre Komponenten beliebige reelle Zahlen sind.

Diagonaltettarionen sind stets links- und rechtsseitig reduziert.

Diagonalkomponenten reduzierter μ-Tettarionen verschwinden nur bei Nullteilern, denn die Norm eines reduzierten μ-Tettarions ist gleich dem Produkte aus seinen μ Diagonalkomponenten.

5. *Bedeutet t ein beliebiges ganzes μ-Tettarion, so kann man auf mannigfache Weise ein eigentliches Einheits-μ-Tettarion ε derart bestimmen, dass das Produkt $\varepsilon \cdot t$ zu einem linksseitig reduzierten μ-Tettarion wird, von dessen Diagonalkomponenten höchstens die letzte negativ ist, was nur für den Fall $N(t) < 0$ eintritt.*

Beweis: Man verstehe unter $\beta^{(i,i)}$ das Haupttettarion h:

$$\beta^{(i,i)} = h = 1$$

und unter $\beta^{(i,\varkappa)}$ dasjenige eigentliche Einheits-μ-Tettarion, welches aus dem Haupttettarion h dadurch abgeleitet wird, dass man in h die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene i^{te} Zeile mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ vertauscht $(i \neq \varkappa)$; z. B.:

$$\beta^{(1,4)} = \left\{\begin{matrix} 0, 0, 0, 1, 0, 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\ -1, 0, 0, 0, 0, 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1 \;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 1 \end{matrix}\right\}$$

Es ist dann $[\beta^{(\varkappa,i)}]^4 = [\beta^{(i,\varkappa)}]^4 = h = 1$, und für beliebiges ganzzahliges n: $\quad [\beta^{(i,\varkappa)}]^{n+4} = [\beta^{(i,\varkappa)}]^n \quad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots\ldots \mu)$.

Man verstehe ferner unter $\varepsilon^{(i,i)}$ das Haupttettarion h und unter $\varepsilon^{(i,\varkappa)} = \varepsilon^{(\varkappa,i)}$ $(\varkappa \neq i)$ dasjenige eigentliche Einheitsdiagonal-μ-Tettarion, bei welchem in der i^{ten} und in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile je -1, in allen andern je $+1$ steht; z. B.:

$$\varepsilon^{(2,3)} = \varepsilon^{(3,2)} = \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0, 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0, 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0, 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0, 0 \\ .&.&.&.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .&.&.&.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ 0, & 0, & 0, & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1, 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0, 1 \end{matrix}\right\}$$

Es ist dann $[\varepsilon^{(i,\varkappa)}]^2 = h = 1$ und für beliebiges ganzzahliges n:

$$[\varepsilon^{(i,\varkappa)}]^{n+2} = [\varepsilon^{(i,\varkappa)}]^n \quad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots\ldots \mu).$$

Man beachte endlich folgendes:

a) das Produkt $\beta^{(i,\varkappa)} \cdot t$ erhält man aus t, indem man die i^{te} Zeile des Komponentensystems von t mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ vertauscht und zugleich mit dem negativen Vorzeichen versieht; z. B.:

$$\beta^{(1,4)} \cdot t = \begin{Bmatrix} 0, 0, 0, 1, 0 \ldots\ldots 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ -1, 0, 0, 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1 \ldots\ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, 0, 0, 0 \ldots\ldots 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_{1,1}, t_{1,2} \ldots\ldots t_{1,\mu} \\ t_{2,1}, t_{2,2} \ldots\ldots t_{2,\mu} \\ t_{3,1}, t_{3,2} \ldots\ldots t_{3,\mu} \\ t_{4,1}, t_{4,2} \ldots\ldots t_{4,\mu} \\ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_{\mu,1}, t_{\mu,2} \ldots\ldots t_{\mu,\mu} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} t_{4,1}, & t_{4,2}, & t_{4,3} & \ldots\ldots & t_{4,\mu} \\ t_{2,1}, & t_{2,2}, & t_{2,3} & \ldots\ldots & t_{2,\mu} \\ t_{3,1}, & t_{3,2}, & t_{3,3} & \ldots\ldots & t_{3,\mu} \\ -t_{1,1}, & -t_{1,2}, & -t_{1,3} & \ldots\ldots & -t_{1,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ t_{\mu,1}, & t_{\mu,2}, & t_{\mu,3} & \ldots\ldots & t_{\mu,\mu} \end{Bmatrix}$$

b) Das Produkt $\varepsilon^{(i,\varkappa)} \cdot t$ erhält man aus t, indem man die i^{te} und die $\varkappa^{\text{te}}$ Zeile des Komponentensystems von t, d. h. jede einzelne Komponente dieser zwei Zeilen, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versieht.

In beiden Fällen bleiben alle übrigen Komponenten durchaus ungeändert.

Um nun den aufgestellten Lehrsatz 5 zu beweisen, betrachte man unter den Komponenten $t_{i,\varkappa}$ der $\varkappa^{\text{ten}}$ Kolonne von t diejenigen, welche links von der Hauptdiagonale stehen, also diejenigen, bei welchen $\varkappa < i$.

Erste Operation: Sind dieselben nicht bereits alle Null, so tritt unter den nicht verschwindenden eine solche von minimalem absolutem Betrage auf, z. B. $t_{\varrho,\varkappa}$. Bei geeigneter Wahl von n ist im Produkte $[\varepsilon^{(\varrho,\varkappa)}]^n \cdot \beta^{(\varrho,\varkappa)} \cdot t$ diese Komponente positiv und steht in der Hauptdiagonale, heisst also $t_{\varkappa,\varkappa}$.

Zweite Operation: Durch Anwendung des vorigen Hülfssatzes (§ 7, 3) kann man nun erreichen, dass alle Komponenten $t_{i,\varkappa}$, bei denen $\varkappa < i$, nicht negativ, aber kleiner als $t_{\varkappa,\varkappa}$ werden.

Sind sie dann noch nicht alle Null, so wende man die erste Operation von Neuem an; die Diagonalkomponente $t_{\varkappa,\varkappa}$ wird dadurch immer verkleinert; nach einer endlichen Anzahl solcher Wiederholungen wird man alle links von der Hauptdiagonale stehenden Komponenten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Kolonne auf Null reduziert haben.

Führt man diese Operationen nacheinander für $\varkappa = 1, \varkappa = 2; \ldots. \varkappa = \mu - 1$ durch, so gelangt man tatsächlich zu einem linksseitig reduzierten μ-Tettarion r mit nicht negativen Diagonalkomponenten.

Da $N(t) = N(r)$ durch das Produkt derselben ausgedrückt wird, muss bei nicht verschwindender negativer Norm eine dieser $t_{\lambda,\lambda}$ negativ sein, und hierzu kann man, vermöge der $\varepsilon^{(i,\varkappa)}$, die letzte wählen.

Anmerkung: Man sieht ein, dass an Stelle der Haupt- auch die Nebendiagonale treten könnte; im Beweis hätte man nur $\varkappa < \mu - i$ an Stelle von $\varkappa < i$ zu setzen.

Es leuchtet ferner ein, dass durch geringe Abänderung der Operationen ($>$ anstatt $<$, und „links ...“ anstatt „rechts ...“) das Produkt $\varepsilon \cdot t$ auch rechtsseitig reduziert gemacht werden kann.

Schliesslich sei bemerkt, dass, dem Inversionsprinzipe zufolge, an Stelle des linksseitigen ein rechtsseitiger Reduktionsalgorithmus treten kann, der in folgendem Satze gipfelt:

Einem vorgegebenen ganzen μ-Tettarion g lässt sich ein eigentliches Einheits-μ-Tettarion ε derart zuordnen, dass das Produkt $g \cdot \varepsilon$ ein links- oder rechtsseitig reduziertes μ-Tettarion wird.

6. *Bedeutet t ein beliebiges ganzes μ-Tettarion, so lassen sich auf mannigfache Weise zwei eigentliche Einheits-μ-Tettarionen $\varepsilon^{(1)}$ und $\varepsilon^{(2)}$ derart bestimmen, dass das Produkt $\varepsilon^{(1)} \cdot t \cdot \varepsilon^{(2)}$ ein Diagonal-μ-Tettarion d wird, unter dessen Diagonalkomponenten $d_{i,i}$ höchstens die letzte negativ ist, und das nur, wenn $N(t) < 0$.* Beweis: L. Kronecker hat diese Tatsache in seinem Aufsatze „Über die Reduktion der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen“ (Crelles Journal Bd. 107, pag. 135—136) bewiesen, und P. Bachmann in seiner „Zahlentheorie“ IV. Teil, erste Abteilung („Von den Elementarteilern der Zahlensysteme“, pag. 294 ff.) näher ausgeführt.

Auf etwas anderem Wege gelangt man zu demselben Ziele, wenn man mit Hülfe der vorhin definierten $\alpha^{(i,\varkappa)}$, $\beta^{(i,\varkappa)}$, $\varepsilon^{(i,\varkappa)}$ und ihrer ganzzahligen Potenzen nacheinander auf Null reduziert:

1. Alle Komponenten der ersten Kolonne, bis auf höchstens die in der Hauptdiagonale stehende;

2. Alle Komponenten der ersten Zeile, höchstens mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale stehenden;

3. Alle Komponenten der zweiten Kolonne, höchstens mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale stehenden;

4. Alle Konponenten der zweiten Zeile, bis auf höchstens die in der Hauptdiagonale stehende; usw.

Die schliesslich übrig bleibenden nicht verschwindenden $\varkappa$ Komponenten $t_{1,1}$, $t_{2,2}$, ... $t_{\varkappa,\varkappa}$, wo $\varkappa \leqq \mu$, erfüllen dann die behaupteten Bedingungen. Da nun sämtliche $\alpha^{(i,\varkappa)}$, $\beta^{(i,\varkappa)}$, $\varepsilon^{(i,\varkappa)}$ eigentliche Einheitstettarionen sind, gilt dasselbe von ihren Potenzprodukten,

und aus der Assoziativität der Multiplikation folgt die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Anmerkung: Man sieht zunächst ein, dass an Stelle der Hauptdiagonale die Nebendiagonale treten könnte.

Ferner leuchtet ein, dass jede Diagonalkomponente Divisor von $N(t)$ sein muss. — Vermittelst des von Kronecker angegebenen Verfahrens lässt sich noch erreichen, dass jedes $t_{i,i}$ durch das vorhergehende $t_{i-1,i-1}$ teilbar wird.

7. Zwei μ-Tettarionen a und b, zwischen denen die Beziehung

$$a = \varepsilon^{(1)} \cdot b \cdot \varepsilon^{(2)}$$

besteht, heissen „äquivalent", wenn $\varepsilon^{(1)}$ und $\varepsilon^{(2)}$ eigentliche Einheits-μ-Tettarionen bedeuten.

Äquivalente μ-Tettarionen haben gleiche Normen, aber nicht umgekehrt. — Die Eigenschaft zweier μ-Tettarionen, einander äquivalent zu sein, ist eine gegenseitige; denn aus voriger Definitionsgleichung zieht man: $b = [\varepsilon^{(1)}]^{-1} \cdot a \cdot [\varepsilon^{(2)}]^{-1} = \varepsilon \cdot a \cdot \bar{\varepsilon}$. Sind zwei ganze μ-Tettarionen a und b demselben dritten g äquivalent, so sind sie es auch untereinander; denn aus $a = \varepsilon \cdot g \cdot \bar{\varepsilon}$ und $b = \varepsilon^{(1)} \cdot g \cdot \bar{\varepsilon}^{(1)}$ folgt $a = \varepsilon \cdot [\varepsilon^{(1)}]^{-1} \cdot b \cdot [\bar{\varepsilon}^{(1)}]^{-1} \cdot \bar{\varepsilon} = \varepsilon^{(2)} \cdot b \cdot \varepsilon^{(3)}$.

Diese Eigenschaften gestatten es, sämtliche ganzen μ-Tettarionen von vorgeschriebener Norm in Klassen einzuteilen nach dem Prinzipe, dass zwei μ-Tettarionen in dieselbe Klasse geworfen werden oder nicht, je nachdem sie einander äquivalent sind oder nicht.

§ 8. Multiplikative Darstellung der ganzen Einheits-μ-Tettarionen; Rang und Elementarteiler eines Tettarions.

1. Um die im vorigen Paragraphen angegebene Reduktion durchzuführen, braucht man im allgemeinen die positiven und negativen ganzzahligen Potenzen von: a) den $\mu(\mu-1)$ Einheitstettarionen $\alpha^{(i,\varkappa)}$; b) den $\binom{\mu}{2} = \frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ Einheitstettarionen $\beta^{(i,\varkappa)} = [\beta^{(\varkappa,i)}]^3$; c) den $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ Einheitstettarionen $\varepsilon^{(i,\varkappa)} = \varepsilon^{(\varkappa,i)}$; im ganzen also von $2\mu(\mu-1)$ verschiedenen Einheitstettarionen. Kronecker hat gezeigt, dass schon μ verschiedene hinreichend sind, um alle andern darzustellen. (Crelles Journal Bd. 68, pag. 283; oder Berliner Akademie der Wissenschaften, vom 15. Oktober 1866.) Diese Anzahl lässt sich weiter auf höchstens drei reduzieren; es ist nämlich:

$$\alpha^{(i,\varkappa)} = \beta^{(\varkappa,1)} \cdot \beta^{(i,2)} \cdot \alpha^{(2,1)} \cdot \beta^{(2,i)} \cdot \beta^{(1,\varkappa)}$$

folglich genügt es, von den $\alpha^{(i,\varkappa)}$ nur eines, z. B. $\alpha^{(2,1)}$, beizubehalten.

Schliesslich kann man auch noch die $\beta^{(\varrho,\lambda)}$ zusammensetzen aus ganzzahligen Potenzen eines einzigen unter ihnen, z. B. von $\beta^{(1,2)}$. Setzt man nämlich:

$$\gamma = \beta^{(2,1)} \cdot \beta^{(3,2)} \cdot \beta^{(4,3)} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \beta^{(\mu,\mu-1)} = \left\{ \begin{matrix} 0, 0, 0 & \ldots\ldots & 0, 0, (-1)^{\mu-1} \\ 1, 0, 0 & \ldots\ldots & 0, 0, \ 0 \\ 0, 1, 0 & \ldots\ldots & 0, 0, \ 0 \\ 0, 0, 1 & \ldots\ldots & 0, 0, \ 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, 0 & \ldots\ldots & 1, 0, \ 0 \\ 0, 0, 0 & \ldots\ldots & 0, 1, \ 0 \end{matrix} \right\}$$

so bewirkt die linksseitige Multiplikation eines beliebigen μ-Tettarions t mit γ eine zyklische Vertauschung aller Zeilen des Komponentensystems von t, abgesehen vom Vorzeichen im Falle, wo μ gerade Zahl ist. Dann wird bei ungeradem μ:

$$\beta^{(\varrho,\lambda)} = \gamma^{\varrho-1} \cdot \beta^{(1,\lambda-\varrho+1)} \cdot \gamma^{\mu-\varrho+1}$$

d. h. aber: mit Hülfe von γ lässt sich ein beliebiges der $\beta^{(i,\varkappa)}$ auf ein solches zurückführen, dessen erster Index $i = 1$ ist. Hiebei darf noch $\varrho \leqq \lambda$ vorausgesetzt werden, weil $\beta^{(i,\varkappa)} = [\beta^{(\varkappa,i)}]^3$.

Ferner lässt sich jedes $\beta^{(1,\varrho)}$, dessen erster Index 1 ist, als Produkt aus solchen $\beta^{(i,\varkappa)}$ darstellen, deren Indices zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind, wie aus der Formel hervorgeht:

$$\beta^{(1,\varrho)} = \beta^{(\varrho,\varrho-1)} \cdot \beta^{(\varrho-1,\varrho-2)} \cdot \ldots \beta^{(3,2)} \cdot \beta^{(1,2)} \cdot \beta^{(2,3)} \cdot \ldots \beta^{(\varrho-2,\varrho-1)} \cdot \beta^{(\varrho-1,\varrho)}.$$

Von diesen letzteren genügt aber eines, etwa $\beta^{(1,2)}$, zur Darstellung aller übrigen, denn:

$$\beta^{(\varrho,\varrho+1)} = \gamma^{\varrho-1} \cdot \beta^{(1,2)} \cdot \gamma^{\mu-\varrho+1}.$$

Bei geradem μ erhalten, durch Anwendung von γ, gewisse Komponenten das negative Vorzeichen; dies lässt sich aber vermöge der $\varepsilon^{(i,\varkappa)}$ wieder aufheben. — Da endlich

$$\varepsilon^{(i,\varkappa)} = \varepsilon^{(\varkappa,i)} = [\beta^{(i,\varkappa)}]^2$$

so leuchtet ein, dass $\alpha^{(2,1)}$, $\beta^{(1,2)}$ und γ mit ihren ganzzahligen Potenzen zur multiplikativen Darstellung aller $\alpha^{(i,\varkappa)}$, $\beta^{(i,\varkappa)}$, $\varepsilon^{(i,\varkappa)}$ ausreichen.

2. Führt man die in § 7, 5 und 6 skizzierte Reduktion an einem eigentlichen Einheits-μ-Tettarion ε durch, so gelangt man zu einem ihm äquivalenten Diagonaltettarion $\varepsilon^{(1)} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{(2)}$, dessen Norm ebenfalls gleich $+1$ ist (§ 3, 4); dies kann nur das Haupttettarion h sein:

$$\varepsilon^{(1)} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{(2)} = h = 1.$$

Diese Gleichung lehrt: Jedes eigentliche Einheitstettarion ist dem Haupttettarion äquivalent.

Zieht man in Betracht, dass in obiger Gleichung $\varepsilon^{(1)}$ und $\varepsilon^{(2)}$ Potenzprodukte von $\alpha^{(2,1)}$, $\beta^{(1,2)}$ und γ sind, so ergibt sich folgender Lehrsatz:

Jedes eigentliche Einheitstettarion ε ist auf unendlich viele Arten darstellbar als Produkt ganzzahliger Potenzen von höchstens drei Einheitstettarionen.

Für diese drei kann man wählen: 1. ein beliebiges der $\alpha^{(i,\varkappa)}$; 2. ein beliebiges der $\beta^{(i,\varkappa)}$; 3. eine beliebige Potenz von γ, wenn nur der Exponent relativ prim gegen μ ist.

Der anzuwendende Algorithmus erinnert an das Kettenbruchverfahren und ergibt sich aus dem Beweise des Satzes; ebenso seine unendliche Vieldeutigkeit.

3. Bei den Düotettarionen ($\mu = 2$) fallen $\beta^{(1,2)}$ und γ zusammen, es genügen also z. B. $\alpha^{(1,2)} = \begin{Bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{Bmatrix}$ und $\gamma = \begin{Bmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{Bmatrix}$ zur Darstellung aller andern eigentlichen Einheitsdüotettarionen.

Bemerkung: Die uneigentlichen Einheitstettarionen bilden nicht eine multiplikative Gruppe. Das obige Reduktionsverfahren wäre in diesem Falle nicht auf ε, sondern etwa auf $(-\varepsilon)$ anzuwenden.

4. Betrachtet man die Komponenten $g_{i,\varkappa}$ eines ganzen μ-Tettarions g als Elemente einer Determinante μ^{ten} Grades, so lassen sich aus derselben $\binom{\mu}{\varkappa}^2 = \left[\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\varkappa+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \quad \ldots\ldots \quad \varkappa}\right]^2$ Minoren vom Grade $\varkappa$ bilden. ($\varkappa = 1, 2, 3, \ldots\ldots \mu$).

Geschieht es hierbei, dass sämtliche Minoren $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so gilt dasselbe auch von allen Unterdeterminanten $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grades, denn diese letzteren, nach den Elementen einer Zeile entwickelt, werden homogene lineare Funktionen von Determinanten $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades, also Null. Ist nun die ganze Zahl r so beschaffen, dass sämtliche Minoren $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, nicht aber alle Minoren r^{ten} Grades, so heisst r: „der Rang des Tettarions". — Bei μ-Tettarionen von nicht verschwindender Norm ist der Rang gleich μ, bei Nullteilern kleiner als μ.

5. Der von Weierstrass eingeführte Begriff des Elementarteilers lässt sich ohne weiteres auf die Tettarionen übertragen. Definition und Grundeigenschaften der Elementarteiler, ebenso diesbezügliche Literaturnachweise, finden sich z. B. in P. Bachmanns „Zahlentheorie" Bd. IV, 1 (p. 288—319) zusammengestellt. Wir wollen hier, unter Anwendung unserer Bezeichnungen, nur folgende Resultate anführen:

a) *Ein gegebenes ganzes μ-Tettarion g ist stets einem Diagonal-μ-Tettarion äquivalent, dessen $\varkappa^{te}$ Diagonalkomponente gleich dem betreffenden $\varkappa^{ten}$ Elementarteiler des gegebenen g ist ($\varkappa = 1, 2, \ldots . \mu$);*

b) *Die Norm eines μ-Tettarions ist gleich dem Produkte aus seinen μ Elementarteilern;*

c) *Zur Äquivalenz zweier μ-Tettarionen ist notwendig und hinreichend, dass sie gleichen Rang und gleiche Elementarteiler besitzen.*

Dieser letzte Satz ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren:

d) *Damit ein μ-Tettarion $a^{(m)}$ in einer multiplikativen Zerlegung eines ganzen μ-Tettarions $g = a^{(1)} \cdot a^{(2)} \cdot \ldots . . \cdot a^{(m)} \cdot \ldots . . a^{(s)}$ als Faktor auftreten könne, ist notwendig und hinreichend, dass der Rang von $a^{(m)}$ nicht kleiner sei als der von g, und dass alle Elementarteiler von $a^{(m)}$ je in den entsprechenden Elementarteilern von g aufgehen;*

e) *Ist ein ganzes μ-Tettarion p Produkt aus mehreren andern, so ist jeder Elementarteiler von p ein Multiplum des entsprechenden Elementarteilers eines jeden der Faktoren.*

Kapitel III.

Grösste gemeinsame Teiler von ganzen Tettarionen.

§ 9. Assoziierte Tettarionen; die primären Tettarionen; ihre Anzahl bei vorgeschriebener Norm.

1. Nach Festlegung des Begriffes der rechtsseitigen Teilbarkeit sollen deren Gesetze untersucht werden. Es stellt sich dabei heraus, dass μ-Tettarionen, die nur um einen linksstehenden Einheitsfaktor differieren, in Bezug auf rechtsseitige Teilbarkeit dieselbe Rolle spielen und geradezu durcheinander ersetzt werden können. Dies führt zu folgender Definition:

Ganze μ-Tettarionen, die sich nur durch einen linksstehenden Einheitsfaktor unterscheiden, sollen „linksseitig assoziiert" heissen. Beispiel: g und $\varepsilon \cdot g$.

Je nachdem die Norm dieses Einheitsfaktors ε den Wert $+1$ oder -1 hat, kann man „eigentlich assoziierte" und „uneigentlich assoziierte μ-Tettarionen" unterscheiden.

Eigentlich assoziierte μ-Tettarionen haben stets dieselbe, uneigentlich assoziierte stets entgegengesetzte Norm. Darauf beruht der Umstand, dass bei Untersuchungen über Teilbarkeit die Norm der in Frage kommenden μ-Tettarionen immer positiv vorausgesetzt werden kann. — μ-Tettarionen von gleicher Norm sind nicht notwendiger Weise linksseitig assoziiert.

2. Die Eigenschaft zweier μ-Tettarionen, zu einander linksseitig assoziiert zu sein, ist eine gegenseitige: Aus $a = \varepsilon \cdot b$ folgt:

$$b = \varepsilon^{-1} \cdot a = \bar{\varepsilon} \cdot a.$$

Sind zwei μ-Tettarionen zu demselben dritten linksseitig assoziiert, so sind sie es auch zu einander: Aus $\begin{Bmatrix} a = \varepsilon \cdot d \\ b = \varepsilon^{(1)} \cdot d \end{Bmatrix}$ folgt:

$$\varepsilon^{-1} \cdot a = d = \left[\varepsilon^{(1)}\right]^{-1} \cdot b, \text{ also: } a = \varepsilon \cdot \left[\varepsilon^{(1)}\right]^{-1} b = \varepsilon^{(2)} \cdot b.$$

Diese zwei Eigenschaften gestatten es, alle ganzen μ-Tettarionen von vorgeschriebener Norm in Klassen einzuteilen, wobei eine solche „Klasse“ aus allen zu einander linksseitig assoziierten μ-Tettarionen besteht. Es wird dann genügen, aus einer solchen Klasse einen einzigen Repräsentanten, etwa p, herauszuheben, um an ihm die rechtsseitigen Teilbarkeitseigenschaften eines jeden Individuums der Klasse zu untersuchen. Dieses p wollen wir von möglichst einfachem Aufbau wählen und „primär“ nennen. Ein derartiges, eine ganze Klasse repräsentierendes p muss eindeutig bestimmt sein; man kann es jedenfalls immer linksseitig reduziert und mit nicht negativen Diagonalkomponenten voraussetzen (§ 7, 5 und § 9, 1). Nun unterscheide man zwei Fälle:

3. Erster Fall: Das vorgelegte ganze μ-Tettarion g hat eine nicht verschwindende Norm. Dann tritt in der Klasse aller zu g linksseitig assoziierten μ-Tettarionen $\varepsilon \cdot g$ kein einziger Nullteiler auf, wohl aber ein μ-Tettarion $p = \sum_{i,\varkappa}^{1\ldots\mu} p_{i,\varkappa} \cdot e^{(i,\varkappa)}$ mit folgenden drei Eigenschaften:

a) Links von der Hauptdiagonale stehen lauter Nullen:

$$p_{i,\varkappa} = 0 \text{ für alle } i > \varkappa. \qquad (\S\ 7,\ 5)$$

b) Alle Diagonalkomponenten sind positiv:

$$p_{\varkappa,\varkappa} > 0. \qquad (\S\ 9,\ 1)$$

c) Jede rechts von der Hauptdiagonale stehende Komponente der $\varkappa^{\text{ten}}$ Kolonne ist nicht negativ, aber kleiner als die betreffende Diagonalkomponente selbst, wenn $\varkappa$ jeden der Werte $2, 3, \ldots \mu$ bedeutet:

$$0 \leqq p_{i,\varkappa} < p_{\varkappa,\varkappa} \text{ für alle } i < \varkappa. \qquad (\S\ 7,\ 3)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots \mu).$$

Dieses μ-Tettarion p ist in der „Klasse“ der $\varepsilon^{(\lambda)} \cdot g$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ eindeutig bestimmt, weil jede seiner Komponenten es ist (v. P. Bachmann „Zahlentheorie“ Bd. IV, p. 348 u. f.). Hierauf gründet sich folgende Definition:

Jedes ganze μ-Tettarion p, dessen Komponenten die obigen drei Gruppen von Bedingungen erfüllen, soll „linksseitig primär" heissen.

4. Zweiter Fall: Das vorgelegte ganze μ-Tettarion g ist ein Nullteiler; dann gilt dasselbe von allen zu g linksseitig assoziierten $\varepsilon^{(\lambda)} \cdot g = p^{(\lambda)}$. Denkt man sich unter allen $p^{(\lambda)}$ die linksseitig reduzierten herausgehoben, so ist bei jedem derselben mindestens eine Diagonalkomponente $p_{i,i}^{(\lambda)} = 0$. Über Vorzeichen oder Grösse der rechts von der Hauptdiagonale stehenden Komponenten $p_{\varrho,i}^{(\lambda)}$ $(\varrho < i)$ dieser i^{ten} Kolonne lässt sich dann nichts aussagen. Bedeutet aber $p_{\varkappa,\varkappa}^{(\lambda)}$ jede der nicht verschwindenden Diagonalkomponenten von $p^{(\lambda)}$, ist also $p_{\varkappa,\varkappa}^{(\lambda)} \neq 0$, so kann man, durch wiederholte Anwendung des Hülfssatzes über linksseitig benachbarte μ-Tettarionen (§ 7, 3), noch erreichen, dass jede rechts von der Hauptdiagonale stehende Komponente dieser $\varkappa^{\text{ten}}$ Kolonne nicht negativ, aber kleiner als $p_{\varkappa,\varkappa}^{(\lambda)}$ werde.

Ein ganzer Nullteiler p soll „linksseitig primär" heissen, wenn er die vorigen Bedingungen erfüllt, nämlich:

a) links von der Hauptdiagonale lauter Nullen:

$$p_{i,\varkappa} = 0, \text{ für alle } i > \varkappa.$$

b) in der Hauptdiagonale keine negativen Komponenten:

$$p_{\varkappa,\varkappa} \geqq 0.$$

c) für alle $i < \varkappa$ und so oft $p_{\varkappa,\varkappa} \neq 0$:

$$0 \leqq p_{i,\varkappa} < p_{\varkappa,\varkappa}.$$

Somit gilt folgender Satz: *Unter den unendlich vielen, zu einem gegebenen ganzen μ-Tettarion linksseitig assoziierten gibt es stets ein linksseitig primäres. Jedem ganzen μ-Tettarion g lässt sich ein Einheits-μ-Tettarion ε derart zuordnen, dass das Produkt $\varepsilon \cdot g$ ein linksseitig primäres μ-Tettarion wird.*

5. Ganz ähnliche Überlegungen gelten, dem Inversionsprinzipe zufolge, für „rechtsseitig assoziierte" ganze μ-Tettarionen, wie z. B. g und $g \cdot \varepsilon$, und „rechtsseitig primäre". Die entsprechenden Definitionen und Sätze ergeben sich aus den angeführten, wenn man darin die beiden Indices der Komponenten, ferner „links..." mit „rechts..." und „Kolonne" mit „Zeile" vertauscht.

Ein primäres μ-Tettarion hat nie eine negative Norm.

6. Schliesslich sei noch bemerkt, dass man auch unter den zu g linksseitig assoziierten ein rechtsseitig primäres, oder unter den zu g rechtsseitig assoziierten ein linksseitig primäres definieren könnte. Der Zusatz „links-" oder „rechtsseitig" kann aber im allgemeinen nur bei Diagonaltettarionen fortgelassen werden, weil das eine Mal nach Kolonnen, das andere Mal nach Zeilen reduziert wird.

7. Die primären Nullteiler können nach vorigem nicht abgezählt werden, wohl aber die primären μ-Tettarionen von nicht verschwindender vorgeschriebener Norm $m \neq 0$. Es sei diese vorgegebene Zahl m in ein Produkt aus μ Faktoren zerlegt:

$$m = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_\varkappa \ldots\ldots a_{\mu-1} \cdot a_\mu \tag{1}$$

und es bedeute $r = \sum_{i;\varkappa}^{1\ldots\mu} r_{i,\varkappa} \cdot e^{(i,\varkappa)}$ ein linksseitig [rechtsseitig] primäres μ-Tettarion von derselben Norm: $N(r) = m$. Es ist dann:

$r_{1,1} = a_1$
$r_{1,2}$ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots\ldots a_2 - 1$;
$r_{1,3}$ und $r_{2,3}$ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots\ldots a_3 - 1$
. . . .

allgemein können die Komponenten: $r_{1,\varkappa}, r_{2,\varkappa}, r_{3,\varkappa}, \ldots\ldots r_{\varkappa-1,\varkappa}$ unabhängig von einander jeden der $a_\varkappa$ Werte $0, 1, 2, \ldots\ldots (a_\varkappa - 1)$ annehmen, wo $\varkappa$ der Reihe nach gleich $2, 3, \ldots\ldots \mu$ zu setzen ist. Die Abzählung ergibt

$$\sum (a_1)^0 \cdot (a_2)^1 \cdot (a_3)^2 \cdot \ldots\ldots \cdot a_\varkappa^{\varkappa-1} \cdot \ldots\ldots a_\mu^{\mu-1} \tag{2}$$

Möglichkeiten, wobei die Summe über alle verschiedenen Zerlegungen (1) zu erstrecken ist. — Man denke sich nun die Zahl m in ihre Primzahlpotenzen zerlegt:

$$m = p_1^{\alpha^{(1)}} \cdot p_2^{\alpha^{(2)}} \cdot p_3^{\alpha^{(3)}} \cdot \ldots\ldots p_n^{\alpha^{(n)}} = \prod_i^{1\ldots n} p_i^{\alpha^{(i)}}$$

dann wird: $a_\varkappa = p_1^{\alpha_\varkappa^{(1)}} \cdot p_2^{\alpha_\varkappa^{(2)}} \cdot p_3^{\alpha_\varkappa^{(3)}} \cdot \ldots\ldots p_n^{\alpha_\varkappa^{(n)}} = \prod_i^{1\ldots n} p_i^{\alpha_\varkappa^{(i)}}$

$$(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots\ldots \mu).$$

Wegen der Gleichung (1) bestehen zwischen den Exponenten die Beziehungen:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} + \cdots\cdots + \alpha_\mu^{(i)} = \alpha^{(i)} \tag{1'}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n).$$

Der Ausdruck (2), der die Anzahl der primären μ-Tettarionen von der Norm m angibt, geht somit in folgenden über:

$$\sum \left(\prod_i^{1\ldots n} p_i^{0 \cdot \alpha_1^{(i)} + 1 \cdot \alpha_2^{(i)} + 2 \cdot \alpha_3^{(i)} + \ldots\ldots + (\mu-1) \cdot \alpha_\mu^{(i)}} \right).$$

Hierbei bezieht sich die Summation auf alle möglichen Zerlegungen (1'). Denkt man sich diese Summe ausgeschrieben, so leuchtet ein, dass die Summation mit der Multiplikation vertauscht werden darf. Der Ausdruck (2) geht somit über in

$$\prod_i^{1\ldots n} \left(\sum p_i^{0 \cdot \alpha_1^{(i)} + 1 \cdot \alpha_2^{(i)} + 2 \cdot \alpha_3^{(i)} + \ldots\ldots + (\mu-1) \alpha_\mu^{(i)}} \right) \tag{3}$$

Bezeichnet man mit $\chi_\mu(m)$ die gesuchte Anzahl der von einander verschiedenen linksseitig primären μ-Tettarionen von der Norm m, so besagt dieser Ausdruck, dass

$$\chi_\mu(m) = \chi_\mu\left(p_1^{\alpha^{(1)}}\right) \cdot \chi_\mu\left(p_2^{\alpha^{(2)}}\right) \cdot \;\ldots\ldots\; \cdot \chi_\mu\left(p_n^{\alpha^{(n)}}\right).$$

Es genügt demnach, diese Anzahl für eine Primzahlpotenz zu bestimmen.

Die einzelnen Glieder der Summe in (3), die auf alle möglichen Zerlegungen (1′) auszudehnen ist, sind identisch mit den Gliedern der Entwicklung von

$$\left(1 + p_i + p_i^2 + p_i^3 + \;\ldots\ldots\; + p_i^{\mu-1}\right)^{\alpha^{(i)}}$$

wenn diese Glieder nur einfach, ohne ihre Polynomialkoeffizienten, genommen werden. Eine direkte Abzählung liefert das Ergebnis:

$$\chi_\mu(p^\alpha) = \frac{(p^{\alpha+1}-1)\cdot(p^{\alpha+2}-1)\cdot \;\ldots\; (p^{\alpha+\lambda}-1)\cdot \;\ldots\; (p^{\alpha+\mu-1}-1)}{(p-1)\cdot(p^2-1)\cdot \;\ldots\; (p^\lambda-1)\cdot \;\ldots\; (p^{\mu-1}-1)}$$

dessen Allgemeingültigkeit durch den Schluss der vollständigen Induktion dargetan werden kann.

§ 10. Euclid'scher Divisionsalgorithmus für ganze Tettarionen.

1. Von fundamentaler Bedeutung für die Zahlentheorie eines vorgelegten Systemes ist die Frage nach dem grössten gemeinschaftlichen Divisor von zwei „ganzen Zahlen". Man gelangt, wenn auch unter gewissen Einschränkungen, zum Beweise der Existenz und zur Auffindung grösster gemeinsamer Teiler von ganzen μ-Tettarionen mit Hülfe des folgenden Satzes:

Bedeutet t ein beliebiges ganzes μ-Tettarion, und m eine rationale, von Null verschiedene ganze Zahl, so lässt sich immer ein ganzes μ-Tettarion q so bestimmen, dass

$$\textit{entweder:}\; t = m \cdot q, \quad \textit{oder:}\; t = m \cdot q + \alpha,$$

wobei die Norm des ganzen μ-Tettarions α von Null verschieden, aber ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $|m^\mu|$ ausfällt:

$$0 < |N(\alpha)| < |m^\mu|.$$

Ist zunächst t ein Diagonaltettarion $d = \left\{\begin{matrix} d_{11}, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0, & d_{22}, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & d_{\mu,\mu} \end{matrix}\right\}$

so ist jede seiner Diagonalkomponenten $d_{i,i}$ irgend einer Zahl $\alpha_{i,i}$ aus der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \pm \alpha_{i,i}, \ldots\ldots \pm E\left(\frac{m}{2}\right)$ kongruent $\mathit{mod}\; m$,

denn diese m Zahlen bilden ein vollständiges Restsystem *mod* m, wenn man bei geradem m von den zwei letzten nur die positive zählt. Da somit $d_{i,i} \equiv \alpha_{i,i}\ (mod\ m)$, existieren μ Zahlen $q_{i,i}$ der Art, dass:

$$d_{i,i} - m \cdot q_{i,i} = \alpha_{i,i} \leqq \left|\frac{m}{2}\right|, \text{ d. h.: } d - m \cdot q = \alpha.$$

Sind alle Komponenten $d_{i,i}$ durch m teilbar, so bedeutet α das Nulltettarion, und es wird $d = m \cdot q$.

Sind nicht sämtliche Komponenten $d_{i,i}$ durch m teilbar, so ist sicher

$$\left|N(\alpha)\right| \leqq \left|\left(\frac{m}{2}\right)^{\mu}\right|.$$

Sollte dabei $N(\alpha)$ verschwinden, so ersetze man diejenigen der $\alpha_{i,i}$, welche Null sind, durch m, und bestimme in geeigneter Weise die entsprechenden Zahlen $q_{i,i} = \frac{d_{i,i} - \alpha_{i,i}}{m}$. Es ist dann immer $d - m\,q = \alpha$, und zugleich:

$$0 < \left|N(\alpha)\right| \leqq \left|m^{\mu-1} \cdot \frac{m}{2}\right| < \left|m^{\mu}\right|.$$

Ist nun t nicht Diagonaltettarion, so ist es doch einem solchen äquivalent: $t = \varepsilon \cdot d \cdot \bar{\varepsilon}$, und die vorigen Gleichungen nehmen die Gestalt an:

Bei der ersten Alternative: $t = \varepsilon \cdot d \cdot \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot m\,q \cdot \bar{\varepsilon} = m \cdot \varepsilon\, q\, \bar{\varepsilon} = m \cdot \bar{q}$. Bei der zweiten Alternative: $t = \varepsilon \cdot d \cdot \bar{\varepsilon} = \varepsilon\,(m\,q + \alpha)\,\bar{\varepsilon} = m\,\varepsilon\,q\,\bar{\varepsilon} + \varepsilon\,\alpha\,\bar{\varepsilon} = m \cdot \bar{q} + \bar{\alpha}$. Da $|N(\bar{\alpha})| = |N(\alpha)|$, ist der behauptete Satz vollständig bewiesen.

2. Es mögen a und d zwei ganze μ-Tettarionen vorstellen, von denen mindestens eines, etwa d, als Nicht-Nullteiler vorausgesetzt wird. Dann lässt sich obiger Lehrsatz 1 auf den Fall $\left\{\begin{matrix} t = a \cdot D' \\ m = d \cdot D' = N(d) \end{matrix}\right\}$ anwenden, unter D' das zu d konjugierte μ-Tettarion verstanden. Aus dem angeführten Lehrsatze folgert man die Existenz zweier ganzen μ-Tettarionen q und α von der Eigenschaft, dass:

entweder $\quad a \cdot D' = N(d) \cdot q \qquad (4)$

oder: $\quad a \cdot D' = N(d) \cdot q + \alpha \qquad (4')$

und zugleich $0 < |N(\alpha)| < |N(d)|^{\mu}$ wird. $\qquad (5)$

Bei der ersten Alternative wird aus (4):

$$a \cdot N(d) = N(d) \cdot q\,d, \text{ oder, weil } N(d) \neq 0:$$
$$a = q \cdot d.$$

Bei der zweiten Alternative zieht man aus (4′):

$$\alpha = a \cdot D' - q \cdot d \cdot D' = (a - q\,d)\,D' = c \cdot D'$$

wobei $c = a - q \cdot d$, oder: $a = q \cdot d + c$ gesetzt wurde.

Aus $\alpha = c \cdot D'$ zieht man weiter:

$$N(\alpha) = N(c) \cdot N(D') = N(c) \cdot [N(d)]^{\mu-1}$$

und durch Einsetzen in (5):

$$0 < |N(\alpha)| = |N(c) \cdot (N(d))^{\mu-1}| < |N(d)|^{\mu}$$

oder, da $N(d) \neq 0$ vorausgesetzt wurde:

$$0 < |N(c)| < |N(d)|.$$

Die gefundenen Gleichungen enthalten folgenden Fundamentalsatz:

Bedeuten a und d zwei ganze μ-Tettarionen, von denen das letztere d nicht Nullteiler ist, so lassen sich immer die ganzen μ-Tettarionen q und c so bestimmen, dass

entweder: $a = q \cdot d$ *und* $c = 0$

oder: $a = q \cdot d + c$ *und zugleich* $0 < |N(c)| < |N(d)|$ *wird.*

3. Auf diesem Satze beruht die Möglichkeit eines rechtsseitigen Divisionsalgorithmus, analog dem bekannten Euklidschen Algorithmus in der Theorie der rationalen Zahlen, mit dem Unterschiede jedoch, dass er im allgemeinen hier nicht in eindeutig bestimmter Weise fortschreitet. Die wiederholte Anwendung obigen Satzes ergibt nämlich:

$$\begin{array}{lll}
a = q \cdot d + c & \text{wobei} & |N(c)| < |N(d)| \\
d = q^{(1)} \cdot c + c^{(1)} & \text{"} & |N(c^{(1)})| < |N(c)| \\
c = q^{(2)} \cdot c^{(1)} + c^{(2)} & \text{"} & |N(c^{(2)})| < |N(c^{(1)})| \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
c^{(n-2)} = q^{(n)} c^{(n-1)} + c^{(n)} & & \\
c^{(n-1)} = q^{(n+1)} \cdot c^{(n)} & \text{"} & |N(c^{(n)})| < |N(c^{(n-1)})|
\end{array}$$

Da man für die absoluten Beträge der Normen eine Aufeinanderfolge von ganzzahligen positiven, stets abnehmenden Werten erhält, wird, nach einer endlichen Anzahl von Operationen, schliesslich die Null erreicht, und man gelangt dann tatsächlich zur letzten Gleichung:

$$c^{(n-1)} = q^{(n+1)} \cdot c^{(n)}.$$

Durch die bekannte Kette von Schlüssen kommt man zur Einsicht, dass dieses $c^{(n)}$ in a und d rechtsseitig aufgeht, ebenso alle seine rechtsseitigen Divisoren. Dieses $c^{(n)}$ heisst „ein rechtsseitiger grösster gemeinsamer Teiler von a und d".

4. Dem Inversionsprinzipe zufolge kann man, durch einen entsprechenden linksseitigen Euklidschen Divisionsalgorithmus, von zwei ganzen μ-Tettarionen a und d, die nicht beide Nullteiler sind, einen

„linksseitigen grössten gemeinsamen Teiler“ c finden, so dass: $\left\{\begin{matrix} a = c \cdot q \\ d = c \cdot \bar{q} \end{matrix}\right\}$. Man hat nur den vorigen Lehrsatz 1 auf den Spezialfall anzuwenden:

$$t = D' \cdot a; \quad m = N(d) = D' \cdot d.$$

Bei diesem Divisionsalgorithmus muss aber stets die Beschränkung eingeführt werden, dass mindestens eines der zwei μ-Tettarionen nicht Nullteiler ist.

§ 11. Tettarionenideale.

1. Die Theorie des grössten gemeinsamen Teilers lässt sich auf allgemeinere und elegantere Art begründen, wenn man sie auf den Begriff des „Tettarionenideals“ stützt.

Ein System von unendlich vielen, nicht sämtlich verschwindenden ganzen μ-Tettarionen t heisse „ein rechtsseitiges Ideal“ [bezw. „ein linksseitiges Ideal“], wenn zugleich mit $t^{(\iota)}$ und $t^{(\varkappa)}$ auch $t^{(\iota)} \pm t^{(\varkappa)}$ und $g \cdot t^{(\iota)}$ [bezw. $t^{(\iota)} \cdot g$] im Systeme enthalten sind, unter g ein beliebiges ganzes μ-Tettarion (nicht nur eine rationale ganze Zahl) verstanden.

Es ist demnach jedes Ideal zugleich ein Modul, weil Addition und Subtraktion, und ein Integritätsbereich, weil auch die Multiplikation in ihm unbeschränkt ausführbar sind. — Ein Ideal kann definitionsgemäss nur ganze μ-Tettarionen enthalten, so dass nicht umgekehrt jeder Modul, noch jeder Integritätsbereich, auch wenn er eine endliche Basis besitzt, zugleich ein Ideal ist.

2. Die in 1 aufgestellte Definition des Ideals lehrt unmittelbar folgendes: *Bezeichnen* $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots\ldots t^{(\iota)}, \ldots\ldots t^{(\varkappa)}, \ldots\ldots t^{(n)}$ *eine endliche Anzahl von ganzen μ-Tettarionen, die nicht sämtlich verschwinden, so bildet die Gesamtheit aller μ-Tettarionen*

$$g^{(1)} \cdot t^{(1)} + g^{(2)} \cdot t^{(2)} + \cdots\cdots + g^{(\iota)} \cdot t^{(\iota)} + \cdots\cdots + g^{(n)} \cdot t^{(n)}$$

wobei $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots\ldots g^{(\iota)}, \ldots\ldots g^{(n)}$ unabhängig von einander alle ganzen μ-Tettarionen durchlaufen, ein rechtsseitiges Ideal.

Es soll dann die Redewendung gebraucht werden: „das rechtsseitige Ideal wird aus $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots\ldots t^{(n)}$ erzeugt“ oder „das rechtsseitige Ideal hat die Basis $[t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots\ldots t^{(n)}]$“.

3. Bezeichnet t irgend ein von Null verschiedenes ganzes μ-Tettarion, und durchläuft g die Gesamtheit aller ganzen μ-Tettarionen, so bildet das System aller $g \cdot t$ ein rechtsseitiges, das System aller $t \cdot g$ ein linksseitiges Ideal. Solche Ideale, deren Basis „eingliedrig“ ist, mögen „rechtsseitige [bezw. linksseitige] Hauptideale“ heissen. Das aus t erzeugte rechtsseitige Hauptideal soll durch das Symbol $(g \cdot t)$ bezeichnet werden.

Ein rechtsseitiges Hauptideal ist somit der Inbegriff aller derjenigen ganzen μ-Tettarionen, in welche ein vorgegebenes ganzes μ-Tettarion rechtsseitig aufgeht.

4. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sollen stets und nur dann „einander gleich“ genannt werden: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, wenn sie genau dieselben Tettarionen enthalten.

Das System aller ganzen μ-Tettarionen bildet demnach das Hauptideal $(g \cdot 1)$ oder (1). Dasselbe lässt sich sowohl als rechtsseitiges, wie auch als linksseitiges Ideal betrachten. *Der Zusatz „rechtsseitig“ oder „linksseitig“ kann allgemein fortgelassen werden bei Idealen, deren Basis aus lauter reellen Tettarionen besteht.* — Später wird gezeigt werden, dass dieser Zusatz auch nur in dem eben angegebenen Falle überflüssig ist (§ 11, 9).

5. Jedes Einheits-μ-Tettarion ε erzeugt dasselbe Hauptideal $(g \cdot 1)$, denn zugleich mit ε ist auch $E' \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot E' = h = 1$, und somit jedes ganze μ-Tettarion, im Hauptideale $(g \cdot \varepsilon) = (\varepsilon \cdot g)$ enthalten. — Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden allgemeinern:

Linksseitig assoziierte μ-Tettarionen erzeugen dasselbe rechtsseitige Hauptideal.

Dass jedes μ-Tettarion des Hauptideals $(g \cdot \varepsilon t)$ auch im Ideale $(g \cdot t)$ vorkommt, leuchtet unmittelbar ein. Umgekehrt lässt sich jedes in $(g \cdot t)$ auftretende μ-Tettarion $a \cdot t$ in die Form setzen:

$$a \cdot t = a \cdot h \cdot t = a\,(E' \cdot \varepsilon) \cdot t = a\,E' \cdot \varepsilon\, t = g \cdot \varepsilon\, t$$

und somit ist nachgewiesen, dass beide Hauptideale genau dieselben Tettarionen enthalten.

Wenn zwei ganze μ-Tettarionen von nicht verschwindender Norm dasselbe rechtsseitige Hauptideal erzeugen, sind sie linksseitig assoziiert. Aus der Voraussetzung: Ideal $(g \cdot d)$ = Ideal $(g \cdot d^{(1)})$ folgt nämlich: $d = g^{(1)} \cdot d^{(1)}$ und $d^{(1)} = g \cdot d$, somit $d = g^{(1)} \cdot g \cdot d$; hieraus weiter: $N(d) = N(g^{(1)}) \cdot N(g) \cdot N(d)$. Diese Gleichung lehrt aber: $N(g) \cdot N(g^{(1)}) = 1$, weil $N(d) \neq 0$ vorausgesetzt ist. Da $N(g)$ und $N(g^{(1)})$ beide ganzzahlig, ergibt sich:

$$N(g) = N(g^{(1)}) = \pm 1$$

d. h. g und $g^{(1)}$ sind Einheits-μ-Tettarionen, etwa $g = \varepsilon$; $g^{(1)} = \varepsilon^{(1)}$, somit $d = \varepsilon^{(1)} d^{(1)}$; $d^{(1)} = \varepsilon \cdot d$ w. z. b. w.

Es gilt nun folgender Fundamentalsatz:

6. *Jedes aus rationalen ganzen μ-Tettarionen gebildete und nicht ausschliesslich aus Nullteilern bestehende rechtsseitige Ideal ist Hauptideal.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{a}$ ein solches Ideal. Nach Voraussetzung enthält es μ-Tettarionen von nicht verschwindender Norm; es bedeute

d eines derjenigen unter ihnen, deren Norm, ihrem absoluten Werte nach, möglichst klein, aber nicht Null ist. Stellt dann a irgend ein Tettarion aus $\mathfrak{a}$ vor, so ist der absolute Betrag seiner Norm entweder Null, oder aber nicht kleiner als $|N(d)|$. Zugleich mit a und d tritt definitionsgemäss auch $a - qd$ im Ideale auf. Nach § 10, 2 ist es möglich, dieses q und ein anderes ganzes μ-Tettarion c so zu bestimmen, dass

$$a = q \cdot d + c \text{ und zugleich } 0 \leqq |N(c)| < |N(d)|$$

wird, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $c = 0$ ist. Nach den getroffenen Annahmen tritt aber notwendigerweise dies letztere ein, d. h. $a = q \cdot d$. Jedes μ-Tettarion des betrachteten Ideals $\mathfrak{a}$ ist somit im Hauptideale $(g \cdot d)$ enthalten; ebenso das umgekehrte, weil d selbst in $\mathfrak{a}$ auftritt. Demnach ist $\mathfrak{a} = (g \cdot d)$ w. z. b. w.

7. Aus dem Inversionsprinzipe folgen ohne weiteres die entsprechenden Tatsachen für linksseitige Ideale. Die wichtigsten unter ihnen lassen sich in folgendem Satze zusammenfassen:

Jedes aus rationalen ganzen μ-Tettarionen gebildete linksseitige Ideal, das nicht ausschliesslich aus Nullteilern besteht, ist Hauptideal.

Rechtsseitig assoziierte μ-Tettarionen erzeugen stets dasselbe linksseitige Ideal; wenn zwei ganze μ-Tettarionen von nicht verschwindender Norm dasselbe linksseitige Hauptideal erzeugen, sind sie rechtsseitig assoziiert.

8. Unter den rechts- und linksseitigen Idealen gibt es singuläre mit der charakteristischen Eigenschaft, dass sie lauter μ-Tettarionen von verschwindender Norm enthalten. Wir wollen sie „Nullteilerideale" benennen. Die vorhin gebrauchten Beweismethoden lassen sich auf Nullteilerideale nicht anwenden. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, liegt der Gedanke nahe, den Begriff des „zweiseitigen Ideals" einzuführen durch folgende Definition:

Ein System von unendlich vielen nicht sämtlich verschwindenden ganzen μ-Tettarionen soll „ein zweiseitiges Ideal" heissen, wenn gleichzeitig mit a und b auch $a + b$, $a - b$ und $g^{(1)} \cdot a \cdot g^{(2)}$ dem Systeme angehören, unter $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ zwei beliebige ganze μ-Tettarionen verstanden.

Man bemerkt nämlich, dass ein zweiseitiges Ideal niemals Nullteilerideal sein kann. Es enthält in der Tat von Null verschiedene μ-Tettarionen $t = \varepsilon \cdot d \cdot \bar{\varepsilon}$, somit auch Diagonaltettarionen d; zugleich mit d kommt aber auch

$$d + \gamma^{m_1} \cdot d \cdot \gamma^{n_1} + \gamma^{m_2} \cdot d \cdot \gamma^{n_2} + \cdots\cdots + \gamma^{m_r} \cdot d \cdot \gamma^{n_r} = s$$

im Ideale vor, wo γ das in § 8, 1 definierte eigentliche Einheits-μ-Tettarion bedeutet, welches, als Faktor gesetzt, eine zyklische Ver-

tauschung der Reihen des Komponentensystems bewirkt. Es lassen sich die Exponenten m_i und n_i $(i = 1, 2 \ldots\ldots r)$ derart bestimmen, dass $N(s)$ nicht Null wird.

Es stellt sich aber heraus, dass diese zweiseitigen Ideale unter den früher definierten links- und rechtsseitigen bereits enthalten sind. Vergleicht man nämlich die diesbezüglichen Definitionen, so erkennt man, dass jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{z}$ sowohl als rechtsseitiges, wie auch als linksseitiges Ideal aufgefasst werden kann. Somit ist jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{z}$ Hauptideal. Es existieren demnach zwei ganze μ-Tettarionen a und b derart, dass

$$\text{zweiseitiges Ideal } \mathfrak{z} = \text{Ideal } (g \cdot a) = \text{Ideal } (b \cdot g) \tag{6}$$

Hieraus folgt weiter die Existenz zweier μ-Tettarionen f und $f^{(1)}$ von der Beschaffenheit, dass $a = b \cdot f$ und $b = f^{(1)} a$, also $a = f^{(1)} \cdot a \cdot f$, $N(a) = N(f^{(1)}) \cdot N(a) \cdot N(f)$, also $N(f) \cdot N(f^{(1)}) = 1$, weil $N(a) \neq 0$. Demnach sind a und b linksseitig sowohl als auch rechtsseitig assoziiert. Unter Berücksichtigung von § 11, 5 und 7 wird somit aus obiger Gleichung (6):

$$\text{Ideal } (g \cdot a) = \text{Ideal } (a \cdot g).$$

Die Bestimmung der zweiseitigen Ideale kommt also auf das Auffinden derjenigen ganzen μ-Tettarionen a hinaus, welche mit der Gesamtheit aller ganzen μ-Tettarionen vertauschbar sind. Diese Eigenschaft besitzen die reellen Tettarionen (§ 2, 7), aber auch nur die reellen, wie jetzt nachgewiesen werden soll.

9. „Das ganze μ-Tettarion c ist mit der Gesamtheit aller ganzen μ-Tettarionen vertauschbar" heisst: einem beliebig vorgegebenen ganzen μ-Tettarion x muss sich ein ganzes μ-Tettarion y derart zuordnen lassen, dass die Gleichung besteht:

$$c \cdot x = y \cdot c.$$

Hierbei darf c als Diagonaltettarion vorausgesetzt werden, denn mit voriger Gleichung ist die folgende:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} \cdot c\,(\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}) \cdot x \cdot \varepsilon &= \bar{\varepsilon} \cdot y \cdot (\bar{\varepsilon}^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}) \cdot c \cdot \varepsilon \\ (\bar{\varepsilon} \cdot c \cdot \varepsilon) \cdot (\varepsilon^{-1} \cdot x \cdot \varepsilon) &= (\bar{\varepsilon} \cdot y \cdot \bar{\varepsilon}^{-1}) \cdot (\bar{\varepsilon} \cdot c \cdot \varepsilon) \\ d \cdot \bar{x} \quad &= \quad \bar{y} \cdot d \end{aligned}$$

gleichbedeutend, weil zugleich mit x auch $\bar{x} = \varepsilon^{-1} \cdot x \cdot \varepsilon$ jedes ganze μ-Tettarion vorstellen kann. ε und $\bar{\varepsilon}$ lassen sich bekanntlich so bestimmen, dass $\bar{\varepsilon} \cdot c \cdot \varepsilon = d$ ein Diagonaltettarion mit nicht negativen Komponenten wird (§ 7, 6). Aus der Gleichung

$$d \cdot \bar{x} = \bar{y} \cdot d$$

folgert man aber, durch Vergleichung der entsprechenden Komponenten, dass $(d_{i,i} \cdot \bar{x}_{i,\varkappa})$ durch $d_{\varkappa,\varkappa}$ teilbar sein muss, und zwar für beliebige ganzzahlige Werte von $\bar{x}_{i,\varkappa}$. Dies ist nur möglich, wenn $d_{i,i}$ ein Multiplum von $d_{\varkappa,\varkappa}$ ist, wobei i und $\varkappa$ der Reihe nach und unabhängig von einander, gleich $1, 2, \ldots\ldots \mu$ zu setzen sind, und dies wieder zieht $d_{11} = d_{22} = \cdots\cdots = d_{\mu,\mu}$ nach sich, d. h. d ist ein reelles μ-Tettarion.

Die zweiseitigen Ideale sind somit identisch mit denjenigen, die aus reellen Tettarionen erzeugt werden, und bei denen man den Zusatz „rechtsseitig" oder „linksseitig", also auch „zweiseitig", fortlassen kann.

§ 12. Grösste gemeinschaftliche Divisoren ganzer Tettarionen; Teilerfremde Tettarionen.

1. Aus den Fundamentalsätzen 6 und 7 des vorigen Paragraphen folgert man direkt den Existenzbeweis und die Eigenschaften von rechtsseitigen und linksseitigen „grössten gemeinschaftlichen Divisoren" irgendwelcher ganzer μ-Tettarionen $a, b, c \ldots\ldots m$, die nicht sämtlich Nullteiler sind. — Zuvörderst sei bemerkt, dass von jetzt ab die Nullteilerideale aus der Betrachtung ganz ausgeschlossen sein sollen, um in einem besondern Kapitel (Kap. VI) erörtert zu werden. Hier wird nur von solchen Idealen die Rede sein, welche nicht ausschliesslich aus Nullteilern bestehen.

Sind nun $a, b, c, \ldots\ldots m$ beliebig vorgelegte ganze μ-Tettarionen, von denen mindestens eines eine nicht verschwindende Norm hat, so bilden die μ-Tettarionen

$$g^{(1)} \cdot a + g^{(2)} \cdot b + g^{(3)} \cdot c + \cdots\cdots + g^{(n)} \cdot m$$

ein rechtsseitiges Ideal, wenn $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots\ldots g^{(n)}$ unabhängig von einander die Gesamtheit der ganzen μ-Tettarionen durchlaufen. Dasselbe ist Hauptideal, d. h. es gibt ein μ-Tettarion d von der Beschaffenheit, dass

$$\text{Ideal}\,(g^{(1)} \cdot a + g^{(2)} \cdot b + g^{(3)} \cdot c + \cdots\cdots + g^{(n)} \cdot m) = \text{Ideal}\,(g \cdot d). \quad (7)$$

Zu jedem Werte von g gehört ein bestimmtes Wertsystem der $g^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n)$, oder deren mehrere, und umgekehrt. Wählt man insbesondere $g^{(1)} = 1$; $g^{(2)} = g^{(3)} = \cdots\cdots = g^{(n)} = 0$, so entspricht diesem Wertsysteme in der Gleichung (7) ein gewisses g, etwa $g = \alpha$, und es wird wegen (7):

$$a = \alpha \cdot d.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich durch passende Wahl der $g^{(i)}$ und Einsetzen in (7):

$$b = \beta \cdot d;\ c = \gamma \cdot d;\ \ldots\ldots\ m = \nu \cdot d.$$

Diese Gleichheiten besagen aber: d ist ein rechtsseitiger gemeinsamer Teiler der vorgelegten μ-Tettarionen $a, b, c, \ldots\ldots m$. Dasselbe gilt von jedem rechtsseitigen Divisor von d. Man sieht auch ein, dass jedes μ-Tettarion, welches gleichzeitig in a, in b, in $c, \ldots\ldots$ in m rechtsseitig aufgeht, zugleich rechtsstehender Divisor von d ist. — Diese Gleichungen lehren somit, dass die rechtsseitigen Divisoren von d genau übereinstimmen mit den gemeinsamen rechtsseitigen Teilern der vorgelegten n μ-Tettarionen $a, b, c, \ldots\ldots m$; es ist somit d als „grösster gemeinsamer rechtsseitiger (oder rechtsstehender) Teiler" von $a, b, c, \ldots\ldots m$ zu bezeichnen.

2. Wählt man in (7) das μ-Tettarion $g = 1$, so entspricht dieser Annahme ein bestimmtes Wertsystem der $g^{(i)}$ (oder deren mehrere). etwa: $g^{(1)} = \gamma^{(1)}, g^{(2)} = \gamma^{(2)}, \ldots\ldots g^{(n)} = \gamma^{(n)}$, und die Gleichung (7) ergibt:

$$d = \gamma^{(1)} \cdot a + \gamma^{(2)} \cdot b + \gamma^{(3)} \cdot c + \cdots\cdots + \gamma^{(n)} \cdot m \tag{8}$$

worin die $\gamma^{(i)}$ gewisse ganze μ-Tettarionen bedeuten. In Worten ausgedrückt heisst dies: *Der rechtsseitige grösste gemeinsame Teiler der ganzen μ-Tettarionen $a, b, c, \ldots\ldots m$ ist immer durch die Form (8) darstellbar als homogene lineare Funktion der $a, b, c, \ldots\ldots m$ mit ganzen Koeffizienten.*

Aus einem früher bewiesenen Lehrsatze (§ 11, 5) erhellt, dass alle bisher angestellten Überlegungen nicht nur für d, sondern auch für $\varepsilon \cdot d$ gelten, unter ε ein beliebiges Einheits-μ-Tettarion verstanden; anders ausgedrückt heisst dies:

Der rechtsseitige grösste gemeinsame Teiler von ganzen μ-Tettarionen ist nur bis auf einen linksstehenden Einheitsfaktor bestimmt.

3. Aus dem Inversionsprinzipe ergibt sich die Richtigkeit der entsprechenden Überlegungen an linksseitigen Idealen. Das Resultat ist folgender zusammenfassende Lehrsatz:

Je n vorgelegte ganze μ-Tettarionen $a, b, c, \ldots\ldots\ldots m$, die nicht sämtlich Nullteiler sind, besitzen einen linksseitigen grössten gemeinsamen Teiler $d^{(1)}$, welcher in der Form

$$d^{(1)} = a \cdot \delta^{(1)} + b \cdot \delta^{(2)} + c \cdot \delta^{(3)} + \ldots\ldots + m \cdot \delta^{(n)} \tag{8'}$$

darstellbar ist, wobei die $\delta^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$ gewisse ganze μ-Tettarionen bedeuten. Jeder linksseitige Divisor von $d^{(1)}$ ist ein linksseitiger gemeinschaftlicher Teiler von $a, b, c, \ldots\ldots m$ und umgekehrt. Ferner ist $d^{(1)}$ nur bis auf ein rechtsseitiges Einheits-μ-Tettarion ε bestimmt.

4. Von jetzt ab beschränken wir, der Kürze halber, die Betrachtung auf zwei μ-Tettarionen a und b; die einzuführenden Begriffe

lassen sich aber auf beliebig viele vorgelegte μ-Tettarionen ohne weiteres ausdehnen. — Die Analogie mit den rationalen ganzen Zahlen führt zu folgender Definition:

Ist der rechtsseitige [bezw. linksseitige] grösste gemeinschaftliche Divisor d von a und b ein Einheits-μ-Tettarion ε, so heissen a und b „rechtsseitig teilerfremd" [bezw. „linksseitig teilerfremd"].

Da jedes ε zu dem Haupttettarion h assoziiert ist, linksseitig sowohl als rechtsseitig, so leuchtet wegen Gleichung (8) folgendes ein:

Sind a und b rechtsseitig teilerfremd, so ist es möglich, die Gleichung

$$g \cdot a + f \cdot b = 1 \tag{9}$$

durch ganze μ-Tettarionen g und f zu befriedigen. — Sind a und b nicht rechtsseitig teilerfremd, so ist diese Gleichung (9) *in ganzen μ-Tettarionen g und f nicht auflösbar*;

oder, in anderer Formulierung:

Die ganzen μ-Tettarionen a und b sind rechtsseitig teilerfremd oder nicht, je nachdem es möglich oder unmöglich ist, ihnen zwei ganze μ-Tettarionen g und f so zuzuordnen, dass die Gleichung (9) *erfüllt wird.*

5. Entsprechende Betrachtungen lassen sich an die Gleichung (8′) anknüpfen. Unter Benutzung der Definition in 4 stellt sich folgendes Ergebnis heraus: Die Gleichung

$$a \cdot g + b \cdot f = 1 \tag{9′}$$

worin a und b zwei vorgeschriebene ganze μ-Tettarionen bedeuten, lässt sich dann und nur dann in ganzen μ-Tettarionen g und f befriedigen, wenn a und b linksseitig teilerfremd sind.

6. Sind a und b rechtsseitig [bezw. linksseitig] nicht teilerfremd,

$$\text{so ist } \begin{Bmatrix} a = \alpha \cdot d \\ b = \beta \cdot d \end{Bmatrix} \text{ bezw.: } \begin{Bmatrix} a = d^{(1)} \cdot \alpha^{(1)} \\ b = d^{(1)} \cdot \beta^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Nimmt man von jeder Seite die Normen, so wird:

$$N(a) = N(\alpha) \cdot N(d) = N(\alpha^{(1)}) \cdot N(d^{(1)}).$$
$$N(b) = N(\beta) \cdot N(d) = N(\beta^{(1)}) \cdot N(d^{(1)}).$$

Diese Gleichungen besagen:

Wenn die ganzen μ-Tettarionen a und b einen rechtsseitigen oder einen linksseitigen gemeinsamen Teiler haben, der nicht Einheits-μ-Tettarion ist, so besitzen $N(a)$ und $N(b)$ einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor.

7. Voriger Satz lässt sich für den Fall, in welchem eines der zwei μ-Tettarionen a und b ein reelles ist, umkehren:

Ein beliebiges ganzes μ-Tettarion a und ein reelles r sind immer zugleich rechtsseitig und linksseitig teilerfremd oder nicht, und zwar tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem $N(a)$ und $N(r)$ relativ prim sind oder nicht.

Sind nämlich a und r linksseitig teilerfremd, so ist die Gleichung

$$a \cdot g + r \cdot f = 1 \tag{10}$$

möglich; aus ihr folgt: $N(a) \cdot N(g) = N(1 - r \cdot f) = 1 - r \cdot z$, unter z eine gewisse rationale ganze Zahl verstanden. Hieraus wird weiter:

$$N(a) \cdot N(g) + r \cdot z = 1 \tag{11}$$

und diese Gleichung zwischen rationalen ganzen Zahlen besagt bekanntlich, dass $N(a)$ und r, also auch $N(a)$ und $N(r) = r^{\mu}$, teilerfremd sind.

Wenn $N(a)$ und $N(r)$ einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen, so können a und r nicht linksseitig teilerfremd sein, weil sonst Gleichung (10), also auch (11), gelten müssten, was durch die Annahme, dass $N(a)$ und r einen gemeinschaftlichen Divisor haben, ausgeschlossen ist. — Hierauf gestützt, beweist man auch den ersten Teil des Satzes indirekt.

Kapitel IV.

Der Zerlegungssatz.

§ 13. Die Primtettarionen; der Zerlegungssatz für Diagonaltettarionen.

1. Ein ganzes μ-Tettarion $\pi = \sum_{\iota,\kappa}^{1\ldots\mu} \pi_{\iota,\kappa} \cdot e^{(\iota,\kappa)}$, welches nicht Einheits-μ-Tettarion und nicht Nullteiler ist, heisse „Primtettarion", wenn es nur solche Darstellungen als Produkt aus zwei ganzen μ-Tettarionen zulässt, bei welchen einer der Faktoren ein Einheitstettarion ist.

Ist ein ganzes μ-Tettarion π Primtettarion, so gilt dasselbe von allen zu π assoziierten, ebenso von den mit π äquivalenten. — Die Norm eines Primtettarions kann man stets, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als positiv voraussetzen; denn ist sie es nicht bereits, so betrachte man $\varepsilon \cdot \pi$ oder $\pi \cdot \varepsilon$ an Stelle von π, unter ε ein uneigentliches Einheits-μ-Tettarion verstanden (§ 3, 4 und § 9, 1).

2. Auf Nullteiler ist dieser Begriff nicht anwendbar. Bedeutet nämlich n einen solchen, so ist n einem Diagonaltettarion d äquivalent, dessen Rang s sicher kleiner als μ ist: $s \leq \mu - 1$.

Man hat dann:

$$d = \left\{\begin{array}{llllll}
d_{1,1}, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & \ldots\ldots 0 \\
0, & d_{2,2}, & \ldots\ldots & 0, & 0, & \ldots\ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
0, & 0, & \ldots\ldots & d_{s,s}, & 0, & \ldots\ldots 0 \\
0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & \ldots\ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & \ldots\ldots 0
\end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{llllll}
d_{1,1}, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots 0 \\
0, & d_{2,2}, & \ldots & 0, & 0, & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots & d_{s,s}, & 0, & \ldots 0 \\
0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots 0 \\
0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots 0
\end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{lllllll}
1, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots & 0 \\
0, & 1, & \ldots & 0, & 0, & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots & 1, & 0, & \ldots & 0 \\
g_{s+1,1}, & g_{s+1,2}, & \ldots & g_{s+1,s}, & g_{s+1,s+1}, & \ldots & g_{s+1,\mu} \\
g_{s+2,1}, & g_{s+2,2}, & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & g_{s+2,\mu} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
g_{\mu,1}, & g_{\mu,2}, & \ldots & g_{\mu,s}, & g_{\mu,s+1}, & \ldots & g_{\mu,\mu}
\end{array}\right\} = d \cdot g.$$

Hierbei sind die Komponenten der letzten $\mu - s$ Zeilen von g beliebige ganze Zahlen. Jeder Nullteiler $n = \varepsilon \cdot d \cdot \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot (d \cdot g) \cdot \bar{\varepsilon} = (\varepsilon \cdot d) \cdot (g \cdot \bar{\varepsilon}) = f^{(1)} \cdot f^{(2)}$ kann somit auf unendlich viele, wesentlich verschiedene Arten als Produkt aus zwei μ-Tettarionen $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$, von denen keines Einheits-μ-Tettarion ist, dargestellt werden.

Bei allen Untersuchungen dieses Kapitels sind demnach die Nullteiler ausdrücklich ausgeschlossen.

3. Ein Primtettarion π wird dadurch charakterisiert, dass seine Norm $N(\pi)$ eine rationale Primzahl ist. — Diese Bedingung ist jedenfalls hinreichend, denn jedes ganze μ-Tettarion π, dessen Norm eine rationale Primzahl ist, ist ein Primtettarion. Angenommen nämlich, es lasse sich dieses π als Produkt aus zwei ganzen μ-Tettarionen a und b darstellen: $\pi = a \cdot b$. Dann folgt hieraus: $N(\pi) = N(a) \cdot N(b)$. Nach Voraussetzung ist aber $N(\pi)$ eine rationale Primzahl p; also muss entweder $N(a)$ oder $N(b)$ gleich 1, d. h. entweder a, oder b, ein Einheitstettarion sein, und π fällt unter die in 1 gegebene Definition.

Die Bedingung $N(\pi) =$ Primzahl p ist aber auch notwendig, denn zugleich mit π muss auch

$$\varepsilon \cdot \pi \cdot \bar{\varepsilon} = d = \left\{\begin{array}{llll}
d_{1,1}, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\
0, & d_{2,2}, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & d_{\mu,\mu}
\end{array}\right\}$$

Primtettarion sein, und hierzu ist notwendig, dass eine der Zahlen $d_{1,1}, d_{2,2}, \ldots . d_{\mu,\mu}$ eine Primzahl, alle übrigen ± 1 seien, denn es ist:

$$\begin{Bmatrix} d_{11}, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & d_{22}, & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots & d_{\mu,\mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d'_{11}, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & d'_{22}, & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots & d'_{\mu,\mu} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d''_{11}, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & d''_{22}, & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots & d''_{\mu,\mu} \end{Bmatrix}$$

sobald $d'_{i,i} \cdot d''_{i,i} = d_{i,i} \quad (i = 1, 2, \ldots . \mu)$.

Man erkennt somit folgendes: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass π ein Primtettarion sei, besteht darin, dass $N(\pi)$ eine rationale Primzahl ist.*

4. Aus dem in § 9, 7 festgestellten allgemeinen Ergebnisse fliesst als Spezialfall folgender Lehrsatz:

Es gibt genau $1 + p + p^2 + \cdots + p^{\mu-1} = \frac{p^\mu - 1}{p - 1}$ *verschiedene primäre Primtettarionen von der Norm p. Jedes derselben geht, links- und rechtsseitig, in der rationalen Primzahl p auf.*

Diese letztere Tatsache erhellt sofort aus der Gleichung:

$$p = N(\pi) = \pi \cdot \Pi' = \Pi' \cdot \pi$$

welche allgemein besagt: Jedes ganze μ-Tettarion ist sowohl rechtsstehender als auch linksstehender Divisor seiner Norm.

5. *Bedeutet d ein ganzes Diagonal-μ-Tettarion, und ist*

$$N(d) = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot \ldots \cdot t^\nu$$

unter $p, q, r, \ldots . t$ lauter voneinander und von 1 verschiedene Primzahlen verstanden, so lässt sich d, wenn von der Reihenfolge der Faktoren abgesehen wird, in eindeutiger Weise durch ein Produkt von der Form

$$d = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \ldots \pi^{(\alpha)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \ldots \varkappa^{(\beta)} \cdot \varrho^{(1)} \ldots \varrho^{(\gamma)} \ldots \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \ldots \tau^{(\nu)} \quad (1)$$

darstellen, worin $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots . \pi^{(\alpha)}$ primäre Diagonalprimtettarionen von der Norm p, ferner $\varkappa^{(1)}, \varkappa^{(2)}, \ldots . \varkappa^{(\beta)}$ solche von der Norm q, ferner $\varrho^{(1)}, \varrho^{(2)}, \ldots . \varrho^{(\gamma)}$ solche von der Norm r, u. s. w. ...., schliesslich $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots . \tau^{(\nu)}$ solche von der Norm t bezeichnen.

Dass eine solche Darstellung möglich ist, erhellt aus der in § 13, 3 angegebenen Zerlegung unmittelbar. Sie ist aber auch stets und nur dann eindeutig bestimmt, wenn alle auftretenden Faktoren primär sein sollen. Dass nur einer der in (1) auftretenden Faktoren, etwa $\pi^{(1)}$, nicht Diagonaltettarion sei, ist desswegen ausgeschlossen, weil die rechts von der Hauptdiagonale stehenden nicht verschwindenden Komponenten bei Multiplikation mit $\pi^{(2)}, \ldots \pi^{(\alpha)}, \varkappa^{(1)}, \ldots \tau^{(\nu)}$ erhalten bleiben und somit auch im Produkte d auftreten müssten, im Wider-

spruche zur Annahme, d sei Diagonaltettarion. — Derselbe Widerspruch ergibt sich, sobald man annimmt, unter den Faktoren in (1) seien mehrere nicht Diagonaltettarionen. Dieselben könnten nämlich, weil primär, rechts von der Hauptdiagonale keine negativen Komponenten enthalten, und in ihrem Produkte d würden gewisse, rechts von der Hauptdiagonale stehende Komponenten, als Summe von lauter positiven Gliedern, nicht Null sein können.

§ 14. Primitive Tettarionen. Der allgemeine Zerlegungssatz. Semikonjugierte Tettarionen.

1. Es soll jetzt die multiplikative Darstellung eines beliebigen ganzen μ-Tettarions mit Hülfe der primären Primtettarionen untersucht werden, um zu dem Analogon der Zerlegung einer rationalen ganzen Zahl in ihre Primfaktoren zu gelangen. Zu diesem Zwecke werden folgende weitere Benennungen eingeführt:

Ein ganzes μ-Tettarion g heisst „primitiv nach m", wenn der grösste gemeinsame Teiler seiner μ^2 Komponenten $g_{i,\varkappa}$ relative Primzahl gegen m ist. — Dies tritt sicher dann ein, wenn derselbe gleich 1 ist. In diesem Falle ist das betreffende Tettarion nach jeder ganzen Zahl m primitiv, der Zusatz „nach m" kann fortgelassen werden:

Ein ganzes μ-Tettarion a heisst „primitiv", wenn seine μ^2 Komponenten $a_{i,\varkappa}$ keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Teiler besitzen.

2. Ein primäres Primtettarion ist stets auch primitiv, denn es sind immer $(\mu-1)$ seiner Diagonalkomponenten gleich 1. — Das einzige primitive reelle Tettarion ist das Haupttettarion, positiv oder negativ genommen.

Alle ganzen μ-Tettarionen gehen aus den primitiven unter ihnen hervor durch Multiplikation mit rationalen ganzen Zahlen. Nun ist die Zerlegung der letzteren in Primfaktoren bekannt, und die Darstellung einer Primzahl als Produkt aus μ primären Primtettarionen in § 13, 5 bereits angegeben. Es bleiben noch die primitiven μ-Tettarionen, welche nicht Diagonaltettarionen sind, zu betrachten übrig. Es sei c ein solches, seine Norm $N(c)$ in ihre Primfaktoren aufgelöst und dieselben in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht, etwa:

$$N(c) = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot p^{(n)}. \tag{2}$$

Es sind zwei Fälle denkbar, die gesondert behandelt werden müssen:

3. **Erster Fall.** Unter den Faktoren $p^{(i)}$ kommen nirgends zwei gleiche vor: $p^{(i)} \neq p^{(\varkappa)}$ sobald $i \neq \varkappa$ $(i, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots . n)$.

Es besitzen c und $p^{(1)}$ unendlich viele linksseitige grösste gemeinsame Teiler, die sämtlich zu einander assoziiert, aber nicht Einheits-μ-Tettarionen sind (§ 12, 7). Unter denselben sei $\pi^{(1)}$ der primäre, so dass:

$$c = \pi^{(1)} \cdot c^{(1)} \tag{3}$$

$$p^{(1)} = \pi^{(1)} \cdot q^{(1)}. \tag{4}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$N(c^{(1)}) = \frac{N(c)}{N(\pi^{(1)})} = \frac{p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \cdot \ldots . . \cdot p^{(n)}}{N(\pi^{(1)})} \tag{5}$$

ferner:

$$N(p^{(1)}) = [p^{(1)}]^{\mu} = N(\pi^{(1)}) \cdot N(q^{(1)}).$$

Da $p^{(1)}$ eine Primzahl vorstellt, muss $N(\pi^{(1)})$ eine Potenz derselben sein, und zwar die erste, wie aus (5) hervorgeht, weil $N(c^{(1)})$ ganzzahlig ausfallen muss und nach Voraussetzung nur ein Faktor $p^{(1)}$ in $N(c)$ auftritt. Demnach ist: $N(\pi^{(1)}) = p^{(1)}$, somit $\pi^{(1)}$ ein primäres Primtettarion, und die Gleichung (5) reduziert sich auf:

$$N(c^{(1)}) = p^{(2)} \cdot p^{(3)} \cdot \ldots \ldots p^{(n)}. \tag{2'}$$

Aus (3) schliesst man weiter, dass $c^{(1)}$ wieder primitiv ist. Bedeutet nämlich r den grössten gemeinschaftlichen Divisor aller μ^2 Komponenten von $c^{(1)}$, so ist $c^{(1)} = r \cdot C$, demnach

$$c = \pi^{(1)} \cdot c^{(1)} = \pi^{(1)} \cdot r\, C = r \cdot \pi^{(1)}\, C$$

durch r teilbar, d. h. die μ^2 Komponenten von c besitzen den gemeinschaftlichen Divisor r; die vorausgesetzte Primitivität von c zieht $r = 1$ nach sich, und dies besagt, dass $c^{(1)}$ primitiv ist.

Man behandle nun die Gleichung (2′) genau so, wie vorhin die Gleichung (2): es ergibt sich die Existenz eines primären Primtettarions $\pi^{(2)}$ von der Norm $p^{(2)}$, so dass

$$c^{(1)} = \pi^{(2)} \cdot c^{(2)}$$
$$p^{(2)} = \pi^{(2)} \cdot q^{(2)}$$

ferner: $c^{(2)}$ wieder primitiv, und

$$N(c^{(2)}) = p^{(3)} \cdot \ldots \ldots p^{(n)}.$$

Durch fortgesetzte Anwendung derselben Schlussweise ergibt sich, nach einer endlichen Anzahl von Operationen:

$$c^{(n-1)} = \pi^{(n)} \cdot c^{(n)}$$
$$p^{(n)} \quad = \pi^{(n)} \cdot q^{(n)}$$

ferner: $c^{(n-1)}$ wieder primitiv, und $N(c^{(n-1)}) = p^{(n)}$.

Da auch $N(\pi^{(n)}) = p^{(n)}$, erhellt aus diesen Gleichungen, dass $N(c^{(n)}) = \pm 1$, d. h. dass $c^{(n)}$ ein Einheitstettarion ε vorstellt. Somit hat sich das zusammenfassende Resultat ergeben:

$$c = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \pi^{(n)} \cdot \varepsilon.$$

Aus dem Beweise geht noch hervor, dass diese Darstellung des primitiven μ-Tettarions c als Produkt aus primären Primtettarionen durchaus eindeutig ist, weil $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots \pi^{(n)}$ als linksseitige primäre grösste gemeinsame Teiler der Reihe nach in vollkommen unzweideutiger Weise bestimmt sind; ebenso ist es der auftretende Einheitsfaktor

$$\varepsilon = (\pi^{(n)})^{-1} \cdot \ldots\ldots \cdot (\pi^{(2)})^{-1} \cdot (\pi^{(1)})^{-1} \cdot c.$$

Dies Resultat lässt sich in folgendem Zerlegungssatze aussprechen:

Es sei c ein primitives ganzes μ-Tettarion, und

$$N(c) = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot p^{(n)}$$

worin $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, \ldots p^{(n)}$ die sämtlichen, von einander und von 1 verschieden vorausgesetzten Primfaktoren von $N(c)$, in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht, bedeuten. Dann lässt sich c, und zwar nur auf eine Weise, in der Form darstellen:

$$c = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots\ldots \pi^{(n)} \cdot \varepsilon$$

worin ε ein Einheits-μ-Tettarion vorstellt, und $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \pi^{(3)}, \ldots \pi^{(n)}$ primäre Primtettarionen bezeichnen, deren Normen der Reihe nach gleich $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, \ldots p^{(n)}$ sind.

Bemerkung: An Stelle des linksseitigen kann der rechtsseitige Divisionsalgorithmus treten. Es ergibt sich dann, bei derselben einschränkenden Voraussetzung, dass nämlich unter den $p^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ nicht zwei gleiche auftreten, die ebenfalls eindeutig bestimmte Zerlegung des primitiven μ-Tettarions c:

$$c = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\pi}^{(1)} \cdot \bar{\pi}^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \bar{\pi}^{(n)}.$$

4. Zweiter Fall: Die Primfaktoren $p^{(i)}$ sind nicht alle von einander verschieden. Ganz wie im ersten Falle ergeben sich aus (2) die Gleichungen (3), (4) und (5), ebenso die Tatsache, dass $c^{(1)}$ wieder primitiv ist und dass $N(\pi^{(1)}) \neq 1$ eine positive ganzzahlige Potenz der Primzahl $p^{(1)}$ sein muss. — Ist $N(\pi^{(1)}) = p^{(1)}$, so behalten die im ersten Falle gezogenen Schlüsse ihre Gültigkeit; ist aber $N(\pi^{(1)}) = [p^{(1)}]^{2+i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots \mu - 3)$, so ist zwar $\pi^{(1)}$ immer unzweideutig bestimmt als linksseitiger primärer grösster gemeinsamer Teiler. In diesem Falle lässt sich schreiben (§ 7, 6):

$$\pi^{(1)} = \varepsilon \cdot d \cdot \bar{\varepsilon}$$

unter d ein Diagonal-μ-Tettarion von der Norm $[p^{(1)}]^{2+i}$ verstanden. Dasselbe kann in ein Produkt aus $(2+i)$ anderen Diagonal-μ-Tettarionen $d^{(\varkappa)}$ von der Norm $p^{(1)}$ zerlegt werden (§ 13, 5):

$$d = d^{(1)} \cdot d^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot d^{(\varkappa)} \cdot \ldots\ldots \cdot d^{(1+i)} \cdot d^{(2+i)} \qquad (6)$$
$$N(d^{(1)}) = N(d^{(2)}) = \ldots\ldots = N(d^{(\varkappa)}) = \ldots\ldots = N(d^{(2+i)}) = p^{(1)}.$$

Dann ist:

$$\pi^{(1)} = \varepsilon\, d\, \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot d^{(1)} \cdot d^{(2)} \cdot d^{(3)} \ldots\ldots d^{(1+i)} \cdot d^{(2+i)} \cdot \bar{\varepsilon}$$
$$= a \cdot d^{(2)} \cdot d^{(3)} \ldots\ldots d^{(1+i)} \cdot b$$

wobei $a = \varepsilon \cdot d^{(1)}$ und $b = d^{(2+i)} \cdot \bar{\varepsilon}$

gesetzt wurde. Nun sind a und b wohl Primtettarionen, da ihre Norm gleich der rationalen Primzahl $p^{(1)}$ ist (v. § 13, 3); aber sie sind nicht notwendigerweise primär. Ferner sind sie nicht unzweideutig bestimmt, weil die Reihenfolge der $d^{(\varkappa)}$ in (6) beliebig ist und, wenn r und s irgend zwei von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots\ldots 1+i, 2+i$ bedeuten, man eben so gut setzen könnte:

$$a = \varepsilon \cdot d^{(r)} \text{ und } b = d^{(s)} \cdot \bar{\varepsilon}$$

ohne die Richtigkeit der Gleichung $\pi^{(1)} = a \cdot \ldots\ldots \cdot d^{(\varkappa)} \cdot \ldots\ldots \cdot b$ aufzuheben.

Demnach lässt sich c stets in ein Produkt aus Primtettarionen zerlegen, so dass entweder jeder einzelne Faktor für sich, oder doch jeweilen das Produkt aus je $\varkappa$ nebeneinander stehenden primär ist, wobei $\varkappa$ einen der Werte $1, 2, \ldots\ldots \mu-1$ annehmen kann.

Die Zerlegung von c in Primtettarionen ist sicher dann mehrdeutig, wenn c nicht Diagonaltettarion ist und überdies unter den Primfaktoren von $N(c)$ mehr als je $(\mu-1)$ einander gleich sind und dieselben nicht nebeneinander stehen, wie aus Gleichung (5) ersichtlich ist.

5. Die Mehrdeutigkeit der Zerlegung wird verringert, wenn in $N(c)$ je alle gleichen Primfaktoren nebeneinander stehen und zu einer Potenz vereinigt werden. Dies ergibt folgenden Spezialfall des Zerlegungssatzes:

Bezeichnet c ein primitives, ganzes μ-Tettarion, aber nicht ein Diagonaltettarion, und ist seine Norm

$$N(c) = p^{\alpha_1} \cdot q^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots t^{\alpha_n}$$

unter $p, q, \ldots\ldots t$ lauter von einander und von 1 verschiedene Primzahlen verstanden, so lässt sich c, wenn mindestens einer der Exponenten $\alpha_i > 1$ ist, im allgemeinen auf mehrere Arten, in die Form setzen:

$$c = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \pi^{(\alpha_1)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \varkappa^{(\alpha_2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \tau^{(\alpha_n)} \cdot \varepsilon$$

unter $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots \pi^{(\alpha_1)}$ Primtettarionen von der Norm p, ferner unter $\varkappa^{(1)}, \varkappa^{(2)}, \ldots \varkappa^{(\alpha_2)}$ solche von der Norm q, u. s. w., schliesslich unter $\tau^{(1)}$,

$\tau^{(2)}, \ldots \tau^{(\alpha_n)}$ *solche von der Norm t, und unter ε ein Einheits-μ-Tettarion verstanden. Hierbei sind die Produkte aus je λ nebeneinander stehenden Faktoren primär, wo λ eine der Zahlen* $1, 2, \ldots . \alpha_i$ $(i = 1, 2, ., \ldots n)$ *bedeutet.*

6. Dass unter den $\pi^{(i)}$, den $\varkappa^{(i)}$, u. s. f. niemals zwei konjugierte nebeneinander stehen, leuchtet unmittelbar ein, denn „konjugierte" treten überhaupt nicht auf, weil die Norm eines „konjugierten" μ-Tettarions nicht eine Primzahl sein kann, sobald $\mu > 2$. Ferner kommen unter den $\pi^{(i)}$, den $\varkappa^{(i)}$, u. s. f. auch nirgends μ nebeneinander zu stehen von der Beschaffenheit, dass das Produkt der $(\mu - 1)$ ersten unter ihnen gleich dem konjugierten des μ^{ten} wäre; sonst würde ja das Produkt aus diesen μ nebeneinander stehenden ein reelles μ-Tettarion r ergeben, und hieraus würde folgen, dass c nicht primitiv ist, im Gegensatze zur ausdrücklichen Voraussetzung. μ-Tettarionen, die in dieser speziellen Beziehung zu einander stehen, mögen der Kürze des Ausdruckes halber durch eine besondere Benennung charakterisiert werden:

Bedeuten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots \ldots \ldots \ldots a^{(\mu)}$ gewisse ganze μ-Tettarionen von gleicher Norm

$$N(a^{(1)}) = N(a^{(2)}) = \ldots \ldots . = N(a^{(\mu)})$$

und ist überdies ein Produkt aus $(\mu - 1)$ nebeneinander stehenden unter ihnen gleich dem zum μ^{ten} konjugierten, etwa

$$a^{(1)} \cdot a^{(2)} \cdot \ldots \ldots \cdot a^{(\mu-1)} = (A^{(\mu)})'$$

so heissen diese μ-Tettarionen „zu einander semikonjugiert". Diese Definition soll auch dann noch gelten, wenn die betreffenden Faktoren, deren Produkt reell ist, nicht direkt nebeneinander stehen, aber infolge Vertauschbarkeit nebeneinander zu stehen kommen können.

Bei Düotettarionen $(\mu = 2)$ ist „semikonjugiert" identisch mit „konjugiert".

7. Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise lässt sich der Zerlegungssatz für Diagonaltettarionen (§ 13, 5) folgendermassen umkehren:

Ein Produkt aus beliebig vielen ganzen Diagonalprimtettarionen stellt ein primitives Diagonal-μ-Tettarion vor, wenn unter den Faktoren nicht μ zu einander semikonjugierte auftreten. Dies folgt einerseits aus der Tatsache, dass die Diagonal-μ-Tettarionen ein Hypo-μ-Tettarionensystem mit kommutativer Multiplikation bilden, andererseits aus der getroffenen Annahme (v. § 4, 8).

8. Es gilt auch die Umkehrung des speziellen Zerlegungssatzes von § 14, 3:

Ein Produkt aus primären Primtettarionen:

$$\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot \pi^{(n)}$$

in welchem $\pi^{(1)}$ die Norm $p^{(1)}$, $\pi^{(2)}$ die Norm $p^{(2)}$, u. s. f., schliesslich $\pi^{(n)}$ die Norm $p^{(n)}$ haben, unter $p^{(1)}, p^{(2)} \ldots . p^{(n)}$ lauter von einander und von 1 verschiedene rationale Primzahlen verstanden, stellt immer ein primitives μ-Tettarion dar.

Der Beweis wird am einfachsten durch den Schluss der vollständigen Induktion geführt: man nimmt an, der Satz sei für alle Produkte aus n Faktoren bereits bewiesen, und folgert hieraus seine Richtigkeit für irgendwelches Produkt aus $(n+1)$ Faktoren; dann ist seine Allgemeingültigkeit nachgewiesen, weil er für $n = 1$ zutrifft (§ 14, 2). — Mit Beibehalt der in der Aussage getroffenen Voraussetzungen sei

$$\pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot \pi^{(n)} = c$$

ein primitives μ-Tettarion, und $\pi^{(1)}$ ein primäres Primtettarion von der Norm $p^{(1)}$. Es ist zu zeigen, dass das Produkt

$$\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot \pi^{(n)} = \pi^{(1)} \cdot c$$

wieder primitiv ist, mit andern Worten, dass der grösste gemeinschaftliche Teiler m der μ^2 Komponenten von $\pi^{(1)} \cdot c$ gleich 1 sein muss. Wäre das nicht der Fall, sondern $m \neq 1$, so würde $\pi^{(1)} \cdot c = m \cdot C$, somit auch $(\Pi^{(1)})' \cdot \pi^{(1)} \cdot c = N(\pi^{(1)}) \cdot c = m\,(\Pi^{(1)})' \cdot C$, durch m teilbar sein. Da c primitiv vorausgesetzt wurde, müsste demnach $N(\pi^{(1)}) = p^{(1)}$ ein Vielfaches von m sein, und dies würde $m = p^{(1)}$ nach sich ziehen, weil $p^{(1)}$ als Primzahl und $m \neq 1$ vorausgesetzt ist.

Vorige Gleichungen ergäben dann:

$$\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots . \cdot \pi^{(n)} = \pi^{(1)} \cdot c = p^{(1)} \cdot C = N(\pi^{(1)}) \cdot C = \pi^{(1)} \cdot (\Pi^{(1)})' \cdot C$$

woraus nach linksseitiger Multiplikation mit $(\pi^{(1)})^{-1}$:

$$\pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots . \cdot \pi^{(n)} = c = (\Pi^{(1)})' \cdot C.$$

Auf diese Weise hätte man zwei verschiedene Darstellungen von c erzielt. Dies steht aber im Widerspruche zum Zerlegungssatze von § 14, 3. Die Annahme $m \neq 1$ ist somit auszuschliessen.

Bemerkung: Derselbe Widerspruch ergibt sich im allgemeinen nicht, sobald in $N(c)$ ein und dieselbe Primzahl mehrmals als Faktor auftritt, wenn also mehrere der Primtettarionen $\pi^{(i)}$ dieselbe Norm haben. Dass der Zerlegungssatz in diesem Falle sich nicht immer umkehren lässt, erkennt man auch direkt an folgendem Beispiele:

Bedeuten p und q zwei rationale, von einander und von 1 verschiedene positive Primzahlen, so gibt es $(1 + p + p^2)$ verschiedene primäre Primtritettarionen $(\mu = 3)$ von der Norm p, die sämtlich

auch primitiv sind; ebenso gibt es $(1+q+q^2)$ von einander verschiedene primäre primitive Primtritettarionen von der Norm q (§ 9, 7 und § 14, 2). Eine leichte direkte Abzählung ergibt nun die Existenz von $(1+p+p^2)(1+q+q^2)$ primitiven, primären, sämtlich von einander verschiedenen Tritettarionen von der Norm $p \cdot q$; hingegen existieren nicht $(1+p+p^2) \cdot (1+p+p^2)$, sondern nur $(1+p+p^2) \cdot (1+p^2)$ von einander verschiedene primäre primitive Tritettarionen von der Norm p^2.

Kapitel V.

Tettarionenkongruenzen.

§ 15. Definitionen. Die rechts- und die linksseitigen Kongruenzen.

1. Eine weitere Folge der Nichtkommutativität der Multiplikation ist der Umstand, dass im Gebiete der μ-Tettarionen sich zwei Kategorien von Kongruenzen unterscheiden lassen.

Zwei beliebige μ-Tettarionen a und b sollen „rechtsseitig kongruent nach dem Modul c" heissen, wenn ihre Differenz $a-b$ durch das ganze μ-Tettarion c rechtsseitig teilbar ist; in Zeichen:

$$a \underset{r}{\equiv} b \quad (mod\ c).$$

Dies bedeutet: es existiert ein *ganzes* μ-Tettarion $g = \sum_{\iota, \varkappa}^{1 \ldots \mu} g_{\iota, \varkappa} \cdot e^{(\iota, \varkappa)}$ derart, dass $a - b = g \cdot c$. Diese Definition kann auch dann aufrecht erhalten bleiben, wenn die Komponenten von a und von b nicht rationale ganze Zahlen sind.

2. Die für rechtsseitige Tettarionenkongruenzen geltenden Gesetze sind denjenigen, welche die Kongruenzen zwischen rationalen ganzen Zahlen beherrschen, ähnlich. Die elementaren unter ihnen sollen hier angeführt werden. Zuvörderst sei bemerkt, dass der Modul einer rechtsseitigen Kongruenz immer linksseitig primär und von positiver Norm vorausgesetzt werden darf; denn:

Sind zwei μ-Tettarionen rechtsseitig kongruent nach einem Modul c, so sind sie es auch nach jedem zu c linksseitig assoziierten μ-Tettarion als Modul.

Ist nämlich $a - b = g \cdot c$, so ist auch $a - b = g \cdot (\varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon)\, c = g \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon c = f \cdot (\varepsilon c)$ d. h. $a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ \varepsilon c)$.

Eine rechtsseitige Kongruenz bleibt bestehen, wenn man ihre beiden Seiten vertauscht; denn aus $a - b = g \cdot c$ folgt: $b - a = (-g) \cdot c$, d. h.: $b \underset{r}{\equiv} a \ (mod\ c)$. Die Eigenschaft zweier μ-Tettarionen, rechtsseitig kongruent zu sein nach einem gewissen Modul, ist somit eine gegenseitige.

Sind zwei μ-Tettarionen a und b demselben dritten t rechtsseitig kongruent (*mod* c), so sind sie, nach demselben Modul c, auch einander rechtsseitig kongruent.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Aus} & a \underset{r}{\equiv} t \ (mod\ c) & \text{folgt:} & a - t = g \cdot c \\
\text{„} & b \underset{r}{\equiv} t \ (mod\ c) & \text{„} & b - t = f \cdot c \\
\text{Hieraus:} & a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ c), & \text{weil:} & a - b = (g - f) \cdot c = g^{(1)} \cdot c.
\end{array}
$$

Jedes μ-Tettarion ist sich selbst rechtsseitig kongruent nach einem beliebigen Modul, denn:

$$a - a = 0 \cdot t, \text{ für jedes } t; \text{ d. h.: } a \underset{r}{\equiv} a \ (mod\ t).$$

Nach einem Einheitstettarion ε als Modul sind zwei beliebige ganze μ-Tettarionen rechtsseitig kongruent; denn:

$$a - b = (a - b)(\varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon) = [(a - b) \cdot \varepsilon^{-1}] \cdot \varepsilon = g \cdot \varepsilon$$

ist gleichbedeutend mit: $a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ \varepsilon)$, für beliebige a und b, wenn nur ihre Differenz $a - b$ ein ganzes μ-Tettarion ist, was sicher zutrifft, sobald a und b ganz sind.

Sind zwei μ-Tettarionen rechtsseitig kongruent nach dem Modul c, so sind sie es auch nach jedem rechtsseitigen Divisor von c als Modul: Aus $a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ c)$, oder $a - b = g \cdot c$ und: $c = g^{(1)} \cdot c^{(1)}$ folgt:

$$a - b = g \cdot g^{(1)} \cdot c^{(1)} = f \cdot c^{(1)}, \quad \text{d. h.: } a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ c^{(1)}).$$

3. *Rechtsseitige Kongruenzen mit gleichem Modul c dürfen wie Gleichungen addiert und subtrahiert werden.*

$$
\text{Aus} \begin{cases} a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ c) & \text{oder:} \quad a - b = g \cdot c \\ t \underset{r}{\equiv} s \ (mod\ c) & \text{oder:} \quad t - s = f \cdot c \end{cases}
$$

folgt: $a \pm t \underset{r}{\equiv} b \pm s \ (mod\ c)$, denn: $(a \pm t) - (b \pm s) = (g \pm f) c = g^{(1)} \cdot c$.

Eine rechtsseitige Kongruenz bleibt bestehen, wenn man ihre beiden Seiten mit demselben ganzen μ-Tettarion linksseitig multipliziert: Zugleich mit $a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ c)$, oder $a - b = g \cdot c$ ist auch: $ta - tb = tg \cdot c = f \cdot c$ d.h. $ta \underset{r}{\equiv} tb \ (mod\ c)$.

Eine rechtsseitige Kongruenz darf, ohne Veränderung ihres Moduls, mit einem ganzen Tettarion v auch rechtsseitig multipliziert werden, wenn das betreffende v mit dem Modul der Kongruenz vertauschbar ist.

Beweis: Aus $a \underset{r}{\equiv} b \ (mod\ c)$, oder: $a - b = g \cdot c$ folgt:

$$av - bv = g \cdot c \cdot v = g \cdot v \cdot c = (gv) \cdot c = f \cdot c, \text{ d. h.:}$$
$$av \underset{r}{\equiv} bv \ (mod\ c).$$

Hieraus erhellt, dass diese Vertauschbarkeit eine hinreichende, aber nicht eine notwendige Bedingung ist. Es genügt die Existenz eines ganzen μ-Tettarions w derart, dass $c \cdot v = w \cdot c$.

Die für reelle Zahlen geltenden Lehrsätze kann man ohne weiteres auf vorige Kongruenzen (2) anwenden und daraus Folgerungen für diese speziellen Tettarionenkongruenzen ziehen. So ist z. B. jedes durch ausschliessliche Anwendung von Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildete Aggregat der $a_{\iota,\varkappa}$ kongruent dem „entsprechenden" Aggregate der $b_{\iota,\varkappa}$, insbesondere die Adjunkten $A_{\iota,\varkappa} \equiv B_{\iota,\varkappa}$ $(mod\ m)$ (§ 3, 2). Diese Tatsache lässt sich auch folgendermassen formulieren:

Sind zwei beliebige μ-Tettarionen nach einer ganzen Zahl $m \neq 0$ als Modul einander kongruent, so sind es auch je ihre transponierten, ihre adjungierten, ihre konjugierten, ihre Normen, nach dem nämlichen Modul m (v. § 16. 1).

Zugleich mit $a \equiv b$ $(mod\ m)$ gilt stets auch:

$$\left.\begin{array}{r} a' \equiv b' \\ A \equiv B \\ A' \equiv B' \\ N(a) \equiv N(b) \end{array}\right\} (mod\ m).$$

3. Durchläuft jede einzelne Komponente eines ganzen μ-Tettarions, unabhängig von den übrigen, je ein vollständiges Restsystem *modulo* m, so entstehen m^{μ^2} verschiedene ganze μ-Tettarionen $v^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots m^{\mu^2})$, die alle unter einander inkongruent sind *modulo* m, da jeweilen mindestens eine der Kongruenzen (2) nicht stattfindet. Dann ist jedes ganze μ-Tettarion irgend einem dieser $v^{(\lambda)}$, und auch nur einem derselben, kongruent *modulo* m. — Denkt man sich alle ganzen μ-Tettarionen in Klassen eingeteilt nach dem Prinzipe, dass zwei Tettarionen jedesmal in dieselbe Klasse geworfen werden oder nicht, je nachdem sie *modulo* m kongruent sind oder nicht, so entstehen auf diese Art m^{μ^2} verschiedene Tettarionenklassen, und aus jeder derselben enthält das System der obigen $v^{(\lambda)}$ einen und nur einen Repräsentanten. Dieses System der $v^{(\lambda)}$ bildet somit „ein vollständiges Restsystem *modulo* m". Im Bereiche der ganzen μ-Tettarionen besteht „ein vollständiges Restsystem $(mod\ m)$" aus m^{μ^2} Tettarionen, die sich ergeben, wenn man die μ^2 Komponenten eines μ-Tettarions unabhängig von einander je ein vollständiges Restsystem $(mod\ m)$ durchlaufen lässt. Am einfachsten geschieht dies, wenn die μ^2 Komponenten je ein und dasselbe vollständige Restsystem $(mod\ m)$ durchlaufen, etwa die kleinsten nicht negativen m ganzen Zahlen: $0, 1, 2, \ldots . (m-1)$.

4. Da eine Division durch ein ganzes μ-Tettarion g einer Multiplikation mit $\frac{G'}{N(g)}$ gleichbedeutend ist (v. § 4, 4 und 5), ergibt sich auf Grund von § 16, 2 der Satz:

Eine Tettarionenkongruenz mit rationaler ganzer Zahl m als Modul darf man, ohne den Modul m zu verändern, nur dann durch ein ganzes μ-Tettarion g links- oder rechtsseitig dividieren, wenn die Norm des Divisors g relative Primzahl gegen den Modul m ist.

5. Kommt es vor, dass eine oder beide Seiten einer Kongruenz ein unbestimmtes μ-Tettarion x, oder deren mehrere: $x, y, \ldots.$ enthalten, so entsteht die Aufgabe, eine Kongruenz „aufzulösen", d. h. diejenigen ganzen μ-Tettarionen $x, y, \ldots.$ zu bestimmen, welche „Wurzeln" der Kongruenz sind, durch welche die zwei Seiten der Kongruenz einander wirklich kongruent werden.

Wir nehmen an, die vorgelegte Kongruenz enthalte nur eine Unbekannte $x = \sum_{i,\varkappa}^{1\ldots\mu} x_{i,\varkappa} \cdot e^{(i,\varkappa)}$, und habe die Form $R(x) \equiv 0 \pmod{m}$, wo $R(x)$ eine rationale Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet. Wir erörtern nur den Fall von Tettarionenkongruenzen ersten Grades; sie lassen sich in die Gestalt bringen:

$$a \cdot x \equiv b \pmod{m}$$
$$\text{oder: } x \cdot a \equiv b \pmod{m}.$$

Sind $N(a)$ und m teilerfremd, so existieren rationale ganze Zahlen r und s von der Eigenschaft, dass

$$r \cdot N(a) + s \cdot m = 1, \quad \text{oder: } r \cdot A' \cdot a + s \cdot m = 1$$
$$\text{d. h.: } r \cdot A'a \equiv 1 \pmod{m}$$

wird. Soll nun $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ sein, so muss auch:

$$r\,A' \cdot a \cdot x \equiv r\,A' \cdot b \pmod{m},$$
$$\text{also: } 1 \cdot x \equiv r\,A' \cdot b \pmod{m} \text{ sein.}$$

Dieses x ist auch wirklich „Wurzel" der vorgelegten Kongruenz, denn aus: $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ wird:

$a \cdot r\,A'b \equiv b \pmod{m}$, d. h.: $r \cdot N(a) \cdot b \equiv b$, d. h.: $b \equiv b \pmod{m}$, weil $r \cdot N(a) \equiv 1 \pmod{m}$ vorausgesetzt wurde.

Hierdurch ist ein Mittel angegeben, Kongruenzen ersten Grades mit einer Unbekannten aufzulösen, und zugleich folgender Satz bewiesen:

Eine hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit der Kongruenz $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ in ganzen μ-Tettarionen x lautet: $N(a)$ teilerfremd gegen m. Ist diese Bedingung erfüllt, so besitzt die Kongruenz eine und nur eine Lösung $x \pmod{m}$, nämlich:

$$x \equiv r\,A'\,b \pmod{m}$$

wobei r eine Wurzel von $r \cdot N(a) \equiv 1 \pmod{m}$ bedeutet.

6. Eleganter gestaltet sich die Theorie der Tettarionenkongruenzen, wenn man sie auf den Begriff des Tettarionenideals stützt.

Definitionsgemäss ist die Kongruenz

$$a \cdot x \equiv b \,(mod\; m) \tag{3}$$

mit der unbestimmten Gleichung

$$a \cdot x + m \cdot y = b \tag{4}$$

gleichbedeutend. Ihre Auflösbarkeit verlangt also, dass das aus a und m erzeugte linksseitige Ideal $(a \cdot g + m \cdot f)$ das μ-Tettarion b enthalte. Dieses Ideal ist aber identisch mit dem Hauptideale $(d \cdot g)$, wo d einen linksseitigen grössten gemeinsamen Teiler von a und m bedeutet; derselbe muss somit auch linksstehender Divisor von b sein, etwa

$$a = d \cdot \alpha; \quad m = d \cdot \nu; \quad b = d \cdot \beta. \tag{5}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es ganze μ-Tettarionen x und y derart, dass

$$d \cdot \alpha \cdot x + d \cdot \nu \cdot y = d \cdot \beta \tag{6'}$$

wird. Aus $m = d \cdot \nu$ ist ersichtlich, dass d nicht Nullteiler ist. Somit reduziert sich vorige Gleichung auf

$$\alpha \cdot x + \nu \cdot y = \beta \tag{6}$$

$$\alpha \cdot x \underset{l}{\equiv} \beta \,(mod\; \nu).$$

Diese letztere Kongruenz, in welcher α und ν teilerfremd sind, besitzt *modulo* ν mindestens eine Lösung; denn sie ist gleichbedeutend mit der Gleichung (6), und diese besagt, dass β im linksseitigen Ideale $(\alpha g + \nu f)$ auftreten muss, was sicher zutrifft, da besagtes Ideal mit dem Hauptideale $(g \cdot 1)$ identisch ist und somit alle ganzen μ-Tettarionen enthält.

Dass jede Lösung von (6) auch Wurzel der vorgelegten Kongruenz (3) ist, lehren die Gleichungen (5) und (6′) unmittelbar.

7. Nimmt man in den drei Gleichungen (5) die Normen, so ist durch vorige Überlegungen folgender Satz bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit der Kongruenz $a \cdot x \equiv b \,(mod\; m)$ in ganzen μ-Tettarionen x besteht darin, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von $N(a)$ und $N(m) = m^{\mu}$ auch in $N(b)$ aufgehe.

Als obere Schranke für die Anzahl der *modulo* m inkongruenten Wurzeln lässt sich m^{μ^2} angeben; denn bedeutet $x^{(0)}$ irgend eine Lösung der Kongruenz (6), so ist jede Wurzel von (3) in der Form $x^{(0)} + p \cdot \nu$ enthalten, wo p ein beliebiges ganzes μ-Tettarion vorstellt und ν das in (5) definierte $\nu = d^{-1} \cdot m$, also nicht notwendigerweise ein reelles μ-Tettarion bedeutet.

Bemerkung: Dem Inversionsprinzipe zufolge gelten dieselben Sätze 5 und 7 auch für die Kongruenz $x \cdot a \equiv b \,(mod\; m)$, welche die Wurzel $x \equiv b\, A' r \,(mod\; m)$ besitzt.

Kapitel VI.

Nullteilerideale.

§ 17. Definitionen; r-kolonnige und r-zeilige Nullteiler; Pseudonorm; Singuläre Nullteiler; Grösste gemeinschaftliche Divisoren von Nullteilern.

1. Ein rechts- oder linksseitiges Nullteilerideal ist ein solches, das ausschliesslich aus Nullteilern besteht. — Von § 12, 1 ab wurden dieselben aus der Betrachtung ausgeschlossen und sollen nun hier näher untersucht werden. Der Kürze des Ausdruckes halber seien folgende weitere Benennungen eingeführt:

Ein beliebiges μ-Tettarion soll „r-kolonnig“ [bezw. „r-zeilig“] heissen, wenn r Kolonnen [bezw. Zeilen] seines Komponentensystems je mindestens eine von Null verschiedene Komponente aufweisen, während zugleich alle übrigen $(\mu - r)$ Kolonnen [bezw. Zeilen] lauter Nullen enthalten. Hierbei bedeutet r eine der Zahlen $1, 2, \ldots . \mu-1$.

Der Einfachheit halber werden wir von jetzt ab voraussetzen, die betreffenden nicht ausschliesslich aus Nullen bestehenden Reihen seien die r ersten. Diese Voraussetzung ist nicht eine Beschränkung der Allgemeinheit, denn im entgegengesetzten Falle liesse sich, durch Multiplikation mit den früher definierten $\beta^{(i,\varkappa)}$, eine entsprechende Vertauschung der Reihen erzielen (§ 7, 5).

2. Ein r-kolonniger [bezw. r-zeiliger] Nullteiler heisse „pseudoreell“, wenn er ein Diagonaltettarion ist und überdies seine r ersten Diagonalkomponenten einander gleich sind $(r < \mu)$; z. B.:

$$\begin{vmatrix} d_{11}, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0, & d_{11}, & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

ist ein zweikolonniger [bezw. zweizeiliger] pseudoreeller Nullteiler.

3. Bedeutet ϱ den Rang eines ganzen μ-Tettarions g (v. § 8, 4), so sind definitionsgemäss die ϱ ersten Elementarteiler von g, nämlich $e_1, e_2, \ldots . e_\varrho$, positive ganze Zahlen, alle folgenden Elementarteiler $e_{\varrho+1}, e_{\varrho+2}, \ldots . e_\mu$ aber gleich Null. Für einen r-kolonnigen ganzen Nullteiler sind nun zwei Fälle denkbar, die ihrer Wichtigkeit wegen durch besondere Benennungen ausgezeichnet werden mögen:

Ein r-kolonniger [bezw. r-zeiliger] ganzer Nullteiler heisse „singulär“ oder „nicht singulär“, je nachdem sein Rang kleiner oder gleich r ist.

Ein einkolonniges μ-Tettarion ist demnach niemals singulär.

4. Bedeutet a einen r-kolonnigen [bezw. r-zeiligen] ganzen Nullteiler, so heisse das Produkt aus seinen r ersten Elementarteilern „die Pseudonorm von a“, Bezeichnung: $\psi N(a)$. Man kann demnach die in 3 gegebene Definition auch folgendermassen fassen: *Ein Nullteiler ist singulär oder nicht, je nachdem seine Pseudonorm verschwindet oder von Null verschieden ist.* — Bei einem linksseitig reduzierten r-kolonnigen Nullteiler ist die Pseudonorm auch gleich dem Produkte aus den ersten r Diagonalkomponenten, desgleichen bei einem rechtsseitig reduzierten r-zeiligen Nullteiler.

5. Wir beschränken nun die Betrachtung auf ganze μ-Tettarionen und stellen für solche, unter Beibehalt dieser abkürzenden Bezeichnungen, folgenden Satz auf:

Bedeuten a und m zwei ganze r-kolonnige μ-Tettarionen, wovon das erste a linksseitig reduziert, das zweite m pseudoreell und von Null verschieden ist, so lassen sich stets zwei andere ganze r-kolonnige μ-Tettarionen q und α der Art bestimmen, dass:

$$\begin{array}{ll} \textit{entweder:} & a = m \cdot q \ \textit{und} \ \alpha = 0 \\ \textit{oder:} & a = m \cdot q + \alpha \end{array}$$

wird, wobei die Pseudonorm des linksseitig reduzierten ganzen r-kolonnigen μ-Tettarions α nicht Null, aber ihrem absoluten Betrage nach kleiner als die Pseudonorm von m ist:

$$0 < |\psi N(\alpha)| < |\psi N(m)| = |(m_{11})^r|.$$

Der Beweis beruht auf demselben Gedankengange wie in § 10, 1: Ist zunächst a ein Diagonaltettarion:

$$a = \left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}, & 0, & \dots\dots & 0, & 0, & \dots\dots\ 0 \\ 0, & a_{22}, & \dots\dots & 0, & 0, & \dots\dots\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, & 0, & \dots\dots & a_{r,r}, & 0, & \dots\dots\ 0 \\ 0, & 0, & \dots\dots & 0, & 0, & \dots\dots\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, & 0, & \dots\dots & 0, & 0, & \dots\dots\ 0 \end{array}\right\}$$

so ist jede seiner Komponenten $a_{i,i}$ irgend einer Zahl $\alpha_{i,i}$ aus der Reihe

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \alpha_{i,i}, \dots \pm E\left(\frac{m_{11}}{2}\right)$$

kongruent *modulo* m_{11}:

$$a_{i,i} \equiv \alpha_{i,i} \ (mod\ m_{11}).$$

Es existieren demnach r Zahlen $q_{i,i}$ derart, dass:

$$a_{i,i} - m_{11} \cdot q_{i,i} = \alpha_{i,i} \leqq \left|\frac{m_{11}}{2}\right|, \text{ woraus weiter}$$

$$a - m_{11} \cdot q = \alpha$$

folgt, wenn q und α Diagonaltettarionen vorstellen, welche je die Zahlen $q_{i,i}$ und $\alpha_{i,i}$ als Diagonalkomponenten haben.

Sind alle $a_{i,i}$ durch m_{11} teilbar, so bedeutet α das Nulltettarion, und es wird $a = m_{11} \cdot q$; sind nicht alle Komponenten $a_{i,i}$ durch m_{11} teilbar, so ist sicher

$$\left|\psi N(\alpha)\right| \leqq \left|\left(\frac{m_{11}}{2}\right)^r\right|.$$

Sollte dabei $\psi N(\alpha)$ verschwinden, so ersetze man diejenigen der r ersten $\alpha_{i,i}$, welche Null sind, durch m_{11} und bestimme in geeigneter Weise die entsprechenden Zahlen $q_{i,i} = \frac{a_{i,i} - \alpha_{i,i}}{m_{11}}$. Es ist dann immer noch $a - m_{11} \cdot q = \alpha$ und zugleich:

$$0 < \left|\psi N(\alpha)\right| \leqq m_{11}^{r-1} \cdot \frac{m_{11}}{2} < \left|m_{11}^r\right| = \left|\psi N(m)\right| \cdot$$

Da endlich $m_{11} \cdot q = m \cdot q$, ist tatsächlich der aufgestellte Satz als gültig erwiesen, wenn a ein Diagonaltettarion bedeutet.

Ist a nicht Diagonaltettarion, aber linksseitig reduziert, so bleiben obige Ausführungen vollständig bestehen; es treten nur Komponenten $a_{i,\varkappa}$ und ihnen entsprechende Zahlen $\alpha_{i,\varkappa}$ auf ($i < \varkappa$; und: $i, \varkappa \leqq r$), die aber bei Bildung von $\psi N(\alpha)$ ganz ohne Einfluss sind.

Ist endlich a ein nicht reduziertes ganzes r-kolonniges μ-Tettarion, so ist es zu einem primären p linksseitig assoziiert. Aus den gefundenen Gleichungen wird dann, bei der ersten Möglichkeit:

$$a = \varepsilon \cdot p = \varepsilon \cdot m_{11}\, q = m_{11} \cdot \varepsilon\, q = m_{11} \cdot q^{(1)}.$$

Hierbei ist aber $m_{11} \cdot q^{(1)}$ verschieden von $m \cdot q^{(1)}$, wenn das Einheitstettarion ε nicht selbst linksseitig reduziert war, somit der Satz im allgemeinen ungültig, sobald a nicht linksseitig reduziert ist.

6. Die in 3 und 4 gegebenen Definitionen setzen ganze Nullteiler voraus. Man kann aber den Begriff der Pseudonorm auch für beliebige μ-Tettarionen mit irgendwelchen reellen Komponenten durch folgende Überlegungen definieren: Es bedeute b einen nicht notwendigerweise primären, aber linksseitig reduzierten r-kolonnigen Nullteiler, etwa:

$$b = \begin{Bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots\ldots & b_{1,r}, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & b_{22}, & \ldots\ldots & b_{2,r}, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & b_{r,r}, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0 \end{Bmatrix}$$

Denkt man sich aus seinem Komponentensysteme diejenigen Elemente herausgehoben, welche den ersten r Kolonnen und Zeilen gemeinsam sind, so entsteht ein gewisses r-Tettarion s:

$$s = \left\{ \begin{array}{llll} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \dots\dots\dots & b_{1,r} \\ 0, & b_{2,2}, & \dots\dots\dots & b_{2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots\dots\dots & b_{r,r} \end{array} \right\}$$

Zu diesem s existiert ein konjugiertes r-Tettarion S' (§ 3, 2 und 3); man mache nun dieses S' zu einem μ-Tettarion durch Hinzufügen von $(\mu - r)$ aus lauter Nullen bestehenden Kolonnen und Zeilen. Auf diese Weise wird aus dem ursprünglichen b ein r-kolonniges μ-Tettarion gebildet, welches „zu b pseudokonjugiert" genannt und mit $\psi B'$ bezeichnet werden soll.

Ein linksseitig reduzierter r-kolonniger Nullteiler b ist mit seinem pseudokonjugierten vertauschbar:

$$b \cdot \psi B' = \psi B' \cdot b, \text{ wenn } b \text{ linksseitig reduziert.}$$

Dieses eindeutig bestimmte Produkt ist ein pseudoreelles μ-Tettarion, dessen Rang höchstens gleich r ist.

7. Bedeutet b ein linksseitig reduziertes r-kolonniges μ-Tettarion mit beliebigen reellen Komponenten, so werde unter der „Pseudonorm von b" das Produkt aus den r ersten Diagonalkomponenten von b verstanden. — Man überzeugt sich auf Grund der gegebenen Sätze leicht, dass für ganze μ-Tettarionen diese Definition der Pseudonorm sich mit der in 4 gegebenen deckt; ferner, dass folgender Satz gilt:

Die Pseudonorm eines Produktes aus r-kolonnigen μ-Tettarionen ist gleich dem Produkte aus den Pseudonormen der einzelnen Faktoren.

8. Von jetzt ab beschränken wir die Betrachtung wieder auf ganze μ-Tettarionen. — Um von einem nicht reduzierteu r-kolonnigen μ-Tettarion t die Pseudonorm zu bestimmen, mache man zuerst das vorgelegte t, durch Multiplikation mit einem geeigneten Einheits-μ-Tettarion ε, zu einem linksseitig primären p, und bestimme von diesem p die Pseudonorm. Assoziierte Nullteiler haben demnach gleiche Pseudonorm.

9. Den Lehrsatz 5 wenden wir auf den Spezialfall an, in welchem $a = t \cdot \psi B'$ und $m = b \cdot \psi B'$ ist, unter t und b ganze linksseitig reduzierte r-kolonnige μ-Tettarionen und unter $\psi B'$ das zu b pseudokonjugierte verstanden. Es darf die Pseudonorm von m nicht Null, also b nicht singulärer Nullteiler sein. Unter dieser Einschränkung

folgt aus obigem Lehrsatze die Existenz von zwei r-kolonnigen ganzen μ-Tettarionen q und α der Art, dass

$$\text{entweder:}\quad t\cdot\psi B' = (b\cdot\psi B')\,q \quad\text{und}\quad \alpha = 0$$
$$\text{oder:}\quad t\cdot\psi B' = (b\cdot\psi B')\cdot q + \alpha \quad\text{und zugleich:}$$
$$0 < |\psi N(\alpha)| < |\psi N(m)| = |(m_{11})^r| = |[\psi N(b)]^r| \tag{1}$$

Bei der ersten Alternative wird:

$$(t\cdot\psi B')\cdot b = (b\cdot\psi B'\cdot q)\cdot b$$
$$\text{d. h.:}\quad t\cdot m = m\cdot q\,b.$$

Aus den getroffenen Annahmen folgert man: $t\cdot m = m\cdot t$, also:

$$m\cdot(t - q\,b) = 0;\ \text{somit}\ t - q\,b = 0$$
$$t = q\cdot b.$$

Bei der zweiten Alternative wird:

$$t\cdot\psi B' = (b\cdot\psi B')\,q + \alpha = m\,q + \alpha = q\,m + \alpha = q\cdot b\cdot\psi B' + \alpha$$

und hieraus: $\alpha = t\cdot\psi B' - q\cdot b\cdot\psi B' = (t - q\,b)\,\psi B' = c\cdot\psi B'$, wobei

$$t - q\cdot b = c \quad\text{oder:}\quad t = q\cdot b + c$$

gesetzt wurde. Aus $\alpha = c\cdot\psi B'$ zieht man weiter:

$$\psi N(\alpha) = \psi N(c)\cdot\psi N(\psi B') = \psi N(c)\cdot[\psi N(b)]^{r-1}.$$

Die Ungleichungen (1) ergeben dann:

$$0 < |\psi N(\alpha)| = |\psi N(c)\cdot[\psi N(b)]^{r-1}| < |[\psi N(b)]^r|$$
$$\text{oder, weil}\quad m_{11} = \psi N(b) \neq 0:$$
$$0 < |\psi N(c)| < |\psi N(b)|.$$

Dieses Resultat lässt sich im folgenden Satze aussprechen:

Bedeuten t und b zwei ganze linksseitig reduzierte r-kolonnige Nullteiler, von denen der letztere b nicht singulär ist, so existieren immer zwei andere linksseitig reduzierte r-kolonnige ganze μ-Tettarionen q und c von der Beschaffenheit, dass:

$$\textit{entweder:}\quad t = q\cdot b \quad\textit{und}\quad c = 0$$
$$\textit{oder:}\quad t = q\cdot b + c \quad\textit{und zugleich:}$$
$$0 < |\psi N(c)| < |\psi N(b)|.$$

Ganz ähnlich wie in § 10, 3 lässt sich hierauf ein linksseitiger „Euklidscher Divisionsalgorithmus" gründen, der, nach einer endlichen Anzahl von Operationen, auf einen linksseitigen grössten gemeinsamen Teiler von zwei ganzen r-kolonnigen Nullteilern führt ($r < \mu$), wenn von diesen mindestens einer nicht singulär ist.

10. Entsprechende Sätze gelten, dem Inversionsprinzipe zufolge, für rechtsseitig reduzierte r-zeilige ganze μ-Tettarionen.

Anmerkung: Bedeutet i eine der Zahlen $1, 2, \ldots. r-1$, so ist der in § 17, 5 bewiesene Lehrsatz auch dann noch gültig, wenn a ein i-kolonniges, m hingegen ein r-kolonniges μ-Tettarion vorstellt. Ebenso kann in obigem Lehrsatze 9 sehr wohl t ein i-kolonniges und b ein r-kolonniges μ-Tettarion bedeuten (v. § 8, 5 d).

§ 18. Nicht singuläre Nullteilerideale. Der Zerlegungssatz für nicht singuläre Nullteiler.

1. Ein rechtsseitiges Ideal soll „r-kolonniges Nullteilerideal" heissen, wenn es mindestens ein r-kolonniges μ-Tettarion enthält ($r < \mu$) und überdies ausschliesslich aus i-kolonnigen Nullteilern besteht, wobei i einen oder mehrere Werte der Zahlenreihe $1, 2, \ldots. r$ annehmen kann.

Eine entsprechende Definition gelte für „linksseitige r-zeilige Nullteilerideale."

2. Es sei irgend ein rechtsseitiges r-kolonniges Nullteilerideal $\mathfrak{n}$ vorgelegt. Man betrachte die Gesamtheit aller in $\mathfrak{n}$ enthaltenen linksseitig reduzierten μ-Tettarionen, hebe unter denselben die r-kolonnigen heraus und bezeichne diese mit $r^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots.$). Es sind dann zwei Fälle denkbar:

entweder haben sämtliche $r^{(\lambda)}$ eine verschwindende Pseudonorm; in diesem Falle möge das Ideal $\mathfrak{n}$ „singulär" heissen;

oder aber es tritt unter den $r^{(\lambda)}$ mindestens eines auf, dessen Pseudonorm nicht Null ist; in diesem Falle heisse das betreffende Ideal „nicht singulär". — Die entsprechende Definition gelte für linksseitige Ideale.

Ein rechtsseitiges einkolonniges Nullteilerideal ist demnach nie singulär, ebenso ein linksseitiges einzeiliges nicht.

Es gilt nun folgender Fundamentalsatz:

3. *Jedes rechtsseitige nicht singuläre r-kolonnige Nullteilerideal ist Hauptideal.*

Beweis: Es genügt, unter den μ-Tettarionen des Ideals die linksseitig reduzierten zu betrachten. Nach Voraussetzung treten unter ihnen nicht singuläre auf. Bezeichnet man mit s dasjenige dieser letzteren, dessen Pseudonorm einen minimalen absoluten Betrag hat (ev. eines derselben), und mit $r^{(\lambda)}$ irgend ein anderes linksseitig reduziertes μ-Tettarion des Ideals, so ist auch $r^{(\lambda)} - q \cdot s$ im Ideale enthalten. Dieses ganze μ-Tettarion q lässt sich nun so bestimmen, dass entweder $r^{(\lambda)} - q\, s = 0$, oder $r^{(\lambda)} - q\, s = c$ wird, und zugleich die Pseudonorm des Nullteilers c, absolut genommen, kleiner ausfällt als diejenige von s, ohne jedoch Null zu sein (§ 17, 9).

Durch die über s getroffene Annahme wird aber diese zweite Alternative $r^{(\lambda)} - q \cdot s = c$ ausgeschlossen.

Somit ist $r^{(\lambda)} = q \cdot s$; ebenso jedes nicht reduzierte μ-Tettarion des Ideals: $a = \varepsilon \cdot r = \varepsilon \cdot q s = q^{(1)} s$. Da s selbst in $\mathfrak{n}$ auftritt, ist das vorgelegte Ideal $\mathfrak{n}$ identisch mit dem Hauptideale (qs).

4. Dem Inversionsprinzipe zufolge gilt auch der entsprechende Satz: *Jedes linksseitige nicht singuläre r-zeilige Nullteilerideal ist Hauptideal.* — Späterer Anwendung wegen heben wir folgenden Spezialfall hervor: *Ein rechtsseitiges einkolonniges Nullteilerideal ist immer Hauptideal.*

5. Eine erwähnenswerte Konsequenz dieser Sätze ist der Umstand, dass die ganze in Kap. III entwickelte Theorie der grössten gemeinsamen Teiler sich, mit entsprechenden Abänderungen, auf die linksseitig reduzierten und nicht singulären Nullteiler ausdehnen lässt, wenn man folgende Definition annimmt:

Ein ganzer r-kolonniger Nullteiler heisst: „ein r-kolonniges Pseudoeinheitstettarion“, wenn seine Pseudonorm den Wert $+1$ oder -1 hat.

Ebenso kann man die in Kap. IV ausgeführte Zerfällung in Faktoren, mit entsprechenden Abänderungen. auf linksseitig reduzierte nicht singuläre Nullteiler übertragen, wenn folgende Definition zu Grunde gelegt wird:

Ein ganzer, r-kolonniger, nicht singulärer Nullteiler heisst „ein r-kolonniges Pseudoprimtettarion“, wenn er nur solche Darstellungen als Produkt aus zwei ganzen r-kolonnigen μ-Tettarionen zulässt, bei welchen einer der Faktoren ein r-kolonniges Pseudoeinheitstettarion ist.

6. Beschränkt man sich auf den Bereich der nichtsingulären r-kolonnigen ganzen μ-Tettarionen, so lassen sich die in Kap. IV bewiesenen Sätze ohne weiteres auf nicht singuläre Nullteiler anwenden.

Die wichtigsten lauten:

Die Bedingung $\psi N(a) = p$, wo p eine rationale Primzahl vorstellt, ist notwendig und hinreichend dafür, dass a ein r-kolonniges Pseudoprimtettarion sei.

Es gibt $\frac{p^r - 1}{p - 1}$ von einander verschiedene linksseitig primäre r-kolonnige Pseudoprimtettarionen, deren Pseudonorm gleich der Primzahl p ist.

Ein r-kolonniges ganzes Diagonaltettarion lässt sich, abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren, in eindeutiger Weise als Produkt aus r-kolonnigen Pseudoprimtettarionen darstellen.

Ein primitiver r-kolonniger ganzer Nullteiler von nicht verschwindender Pseudonorm ist in eindeutiger Weise als Produkt aus linksseitig primären r-kolonnigen Pseudoprimtettarionen darstellbar, wenn seine Pseudonorm Produkt aus lauter ungleichen Primzahlen ist, deren Reihenfolge vorgeschrieben wird.

Zweiter Teil: ***Spezielle Tettarionen.***

Kapitel I.

Die Düotettarionen.

$(\mu = 2)$.

§ 1. Theorie der Ideale bei Düotettarionen.

1. *Im Bereiche der ganzen Düotettarionen ist jedes rechtsseitige Nullteilerideal stets Hauptideal.*

Es bedeute $\mathfrak{n}$ ein beliebiges, ausschliesslich aus ganzen Düotettarionen bestehendes Nullteilerideal. Ist dasselbe einkolonnig, so ist es stets Hauptideal, wie bereits nachgewiesen (§ 18, 4). Ist dasselbe nicht einkolonnig, so mögen $a = \varepsilon \cdot \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}$ und $b = \varepsilon^{(1)} \begin{Bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}$ irgend zwei Tettarionen aus $\mathfrak{n}$ vorstellen. Zugleich mit a und b ist auch $(g \cdot \varepsilon^{-1}) \cdot a + \left(g^{(1)} \cdot [\varepsilon^{(1)}]^{-1}\right) b = g \cdot \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ 0, & 0 \end{Bmatrix} + g^{(1)} \cdot \begin{Bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ 0, & 0 \end{Bmatrix} = s$ im Ideale $\mathfrak{n}$ enthalten, wo g und $g^{(1)}$ irgend zwei ganze Düotettarionen bedeuten. Da nun

$$s = \begin{Bmatrix} g_{11} \cdot a_{11} + g'_{11} \cdot b_{11}, & g_{11} \cdot a_{12} + g'_{11} \cdot b_{12} \\ g_{21} \cdot a_{11} + g'_{21} \cdot b_{11}, & g_{21} \cdot a_{12} + g'_{21} \cdot b_{12} \end{Bmatrix}$$

immer Nullteiler sein soll, muss seine Norm identisch verschwinden, und zwar für beliebige ganzzahlige Werte der $g_{\iota,\varkappa}$ und $g'_{\iota,\varkappa}$. Dies zieht $a_{11} \cdot b_{12} - b_{11} \cdot a_{12} = 0$ nach sich, also:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{p}{q}$$

wo p und q teilerfremd vorausgesetzt werden dürfen. Wäre obige Bedingung nicht erfüllt, so wäre $\mathfrak{n}$ nicht ein Nullteilerideal. Ferner sind p und q von Null verschieden, weil im entgegengesetzten Falle das Ideal einkolonnig würde. Für jedes Düotettarion $a^{(\lambda)} = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot \begin{Bmatrix} a_{11}^{(\lambda)}, & a_{12}^{(\lambda)} \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}$ aus $\mathfrak{n}$ ist somit $\begin{matrix} a_{11}^{(\lambda)} = m^{(\lambda)} \cdot p \\ a_{12}^{(\lambda)} = m^{(\lambda)} \cdot q \end{matrix}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ *in inf.*$)$.

Bedeutet nun v den grössten gemeinsamen Teiler aller Zahlen $m^{(\lambda)}$, ist also $m^{(\lambda)} = v \cdot n^{(\lambda)}$, so hat jedes Tettarion des vorgelegten Ideals die Gestalt:

$$a^{(\lambda)} = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot m^{(\lambda)} \cdot \begin{Bmatrix} p, & q \\ 0, & 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot n^{(\lambda)} \cdot \begin{Bmatrix} v \cdot p, & v \cdot q \\ 0, & 0, \end{Bmatrix} = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot n^{(\lambda)} \cdot \delta = g^{(\lambda)} \cdot \delta.$$

Alle Tettarionen aus $\mathfrak{n}$ sind somit im rechtsseitigen Hauptideale $(g \cdot \delta)$ enthalten. Es bleibt noch das Umgekehrte nachzuweisen übrig. Aus der getroffenen Annahme, v sei der grösste gemeinschaftliche Teiler aller $m^{(\lambda)} = n^{(\lambda)} \cdot v$ folgt, dass im Ideale $\mathfrak{n}$ zwei linksseitig reduzierte Düotettarionen $a^{(\varrho)} = n^{(\varrho)} \cdot \delta$ und $a^{(\sigma)} = n^{(\sigma)} \cdot \delta$ auftreten, bei welchen $n^{(\varrho)}$ und $n^{(\sigma)}$ relative Primzahlen sind. Dann besteht bekanntlich eine Gleichung von der Form:

$$f \cdot n^{(\varrho)} + f^{(1)} \cdot n^{(\sigma)} = 1$$

wo f und $f^{(1)}$ passend gewählte rationale ganze Zahlen vorstellen. Diese Gleichung ergibt:

$$f \cdot a^{(\varrho)} + f^{(1)} \cdot a^{(\sigma)} = \delta.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass δ selbst im betrachteten Ideale $\mathfrak{n}$ auftritt; dieses ist infolgedessen identisch mit dem rechtsseitigen Hauptideale $(g\ \delta)$. Es gilt somit ausnahmslos der Fundamentalsatz:

Jedes aus rationalen ganzen Düotettarionen gebildete rechtsseitige Ideal ist Hauptideal. Ein entsprechender Satz besteht, dem Inversionsprinzipe zufolge, für linksseitige Düotettarionenideale.

2. Späterer Anwendung halber heben wir folgende Konsequenz dieses Fundamentalsatzes hervor: *Jedes aus rationalen ganzen μ-Tettarionen gebildete rechtsseitige zweikolonnige Ideal ist rechtsseitiges Hauptideal. Der Satz bleibt richtig, wenn „linksseitig" statt „rechtsseitig" gesetzt wird.*

Es sind nämlich alle μ-Tettarionen des Ideales zu den linksseitig reduzierten unter ihnen assoziiert, und diese letzteren besitzen einen rechtsstehenden grössten gemeinsamen Teiler, der selbst im Ideale enthalten ist. Um das einzusehen, braucht man nur die linksseitig reduzierten μ-Tettarionen des Ideales durch eine Permutation auf „entsprechende" linksseitig reduzierte Düotettarionen abzubilden (v. § 5, 2 und 3).

3. Ein Tettarion von nicht verschwindender Norm kann nicht ein Nullteilerideal erzeugen. Wenn also zwei Tettarionen dasselbe Hauptideal erzeugen, so ist entweder keines von beiden Nullteiler, oder aber es sind es beide zugleich. Dass sie im ersten Falle assoziiert sind, wurde bereits nachgewiesen (§ 11, 5). Für Düotettarionen gilt dies auch im zweiten Falle:

Wenn zwei Nullteiler dasselbe rechtsseitige Düotettarionenideal erzeugen, sind sie linksseitig assoziiert.

Es seien q und $q^{(1)}$ zwei echte Nullteiler, die wir als linksseitig primär annehmen dürfen (§ 9, 4 und § 11, 5) und:

$$\text{Ideal}\,(g \cdot q) = \text{Ideal}\,(g \cdot q^{(1)}).$$

Aus dieser Voraussetzung folgt: $q = f^{(1)} \cdot q^{(1)}$ und $q^{(1)} = f \cdot q$; ausgeschrieben:

$$\begin{Bmatrix} q_{11}, q_{12} \\ 0, \;\; 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_{11}, f'_{12} \\ f'_{21}, f'_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q'_{11}, q'_{12} \\ 0, \;\; 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_{11} \cdot q'_{11}, & f'_{11} \cdot q'_{12} \\ f'_{21} \cdot q'_{11}, & f'_{21} \cdot q'_{12} \end{Bmatrix}.$$

Da q'_{11} und q'_{12} nicht gleichzeitig verschwinden können, ist $f'_{21} = 0$. Die Komponentenvergleichung lehrt ferner, dass q_{11} ein Vielfaches von q'_{11} und q_{12} ein Vielfaches von q'_{12} ist. Aus der Gleichung $q^{(1)} = f \cdot q$ folgt das umgekehrte, dass nämlich q'_{11} und q'_{12} Vielfache von q_{11}, bezw. von q_{12} sein müssen. Somit ist notwendigerweise $f'_{11} = f_{11} = 1$, woraus:

$$q_{11} = q'_{11}; \quad q_{12} = q'_{12}$$

weil die zwei Zahlen q_{11} und q_{12} nicht gleichzeitig verschwinden können. Aus $q = q^{(1)}$ erschliesst man unmittelbar die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Derselbe Satz gilt noch, dem Inversionsprinzipe zufolge, wenn „linksseitig“ und „rechtsseitig“ miteinander vertauscht werden.

4. Aus dem bisherigen ergibt sich, dass die ganze in Kap. III entwickelte Theorie der grössten gemeinsamen Teiler bei Düotettarionen ohne weiteres auf die Nullteiler ausgedehnt werden kann.

§ 2. Der Zerlegungssatz für Düotettarionen.

1. Der in § 14, 3 u. f. ausgeführte und nur unter gewissen Einschränkungen aufgestellte allgemeine Zerlegungssatz gilt bei Düotettarionen ganz ausnahmslos:

Es sei c ein primitives Düotettarion, und

$$N(c) = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \cdot \ldots\ldots \cdot p^{(n)} \tag{1}$$

wo $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, \ldots\ldots p^{(n)}$ die sämtlichen, gleichen oder ungleichen Primfaktoren von $N(c)$, in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht, bedeuten. Dann ist c, und zwar nur auf eine Weise, in der Form

$$c = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \pi^{(n)} \cdot \varepsilon \tag{2}$$

darstellbar, wo $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \pi^{(3)} \ldots\ldots \pi^{(n)}$ primäre Primtettarionen bezeichnen, deren Normen der Reihe nach gleich $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)} \ldots\ldots p^{(n)}$ sind, und ε ein Einheitsdüotettarion vorstellt.

Der Beweis ist genau so zu führen, wie in § 14, 3. Aus den dort schon aufgestellten Gleichungen

$$c = \pi^{(1)} \cdot c^{(1)} \tag{3}$$
$$p^{(1)} = \pi^{(1)} \cdot q^{(1)} \tag{4}$$

in welchen $\pi^{(1)}$ den linksseitig primären grössten gemeinsamen Teiler von c und $p^{(1)}$ bedeutet, folgt zunächst, dass $q^{(1)}$ nicht Einheitsdüotettarion sein kann, weil sonst c durch den Primfaktor $p^{(1)}$ teilbar, also nicht primitiv wäre; $|N(q^{(1)})| \neq 1$. Da aber, wegen (4):

$$N(p^{(1)}) = N(\pi^{(1)}) \cdot N(q^{(1)}) = [p^{(1)}]^2$$

muss immer $N(\pi^{(1)}) = N(q^{(1)}) = \pm p^{(1)}$, d. h. $\pi^{(1)}$ Primtettarion sein, weil $p^{(1)}$ eine rationale Primzahl bezeichnet. Der in § 14, 4 besonders behandelte zweite Fall fällt somit bei Düotettarionen ganz ausser Betracht.

Hingegen ist zu bemerken, dass die Darstellung in (2) mehrdeutig wird, sobald in (1) mehrere Primfaktoren einander gleich sind und nicht nebeneinander stehen, etwa $p^{(1)} = p^{(i)}$. Aus (3) ergibt sich nämlich:

$$N(c^{(1)}) = \frac{N(c)}{N(\pi^{(1)})} = \frac{p^{(1)} \cdot p^{(2)} \ldots\ldots p^{(i)} \ldots\ldots p^{(n)}}{p^{(1)}}$$

und der Faktor $p^{(1)}$ des Nenners lässt sich dann nach Belieben entweder gegen $p^{(1)}$, oder gegen $p^{(i)} = p^{(1)}$ des Zählers kürzen; es wird dann $\pi^{(2)}$ den linksseitig primären, grössten gemeinsamen Teiler von $c^{(1)}$ und $p^{(2)}$, oder aber von $c^{(1)}$ und $p^{(1)}$ vorstellen. Dass diese Vieldeutigkeit aufhört, sobald je alle gleichen Primfaktoren nebeneinander stehen, erkennt man sofort; ebenso, dass sie aufgehoben wird durch die Forderung, es solle $N(\pi^{(2)})$ gleich $p^{(2)}$, allgemein $N(\pi^{(\lambda)}) = p^{(\lambda)}$ sein $(\lambda = 1, 2, \ldots\ldots n)$.

2. Dasselbe gilt, wenn an Stelle des linksseitigen der entsprechende rechtsseitige Divisionsalgorithmus tritt. Die sich hierbei ergebende Darstellung von c:

$$c = \varepsilon \cdot \bar{\pi}^{(1)} \cdot \bar{\pi}^{(2)} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \bar{\pi}^{(n-1)} \cdot \bar{\pi}^{(n)}$$

in welcher $\varepsilon, \bar{\pi}^{(1)}, \bar{\pi}^{(2)}, \ldots\ldots \bar{\pi}^{(n)}$ dieselbe Bedeutung haben wie in 1, ist ebenfalls eindeutig bestimmt, sobald die Reihenfolge der Faktoren von $N(c) = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot p^{(n)}$ vorgeschrieben ist.

3. Ein erwähnenswerter Spezialfall des vorigen Satzes ergibt sich, wenn man die Primfaktoren von $N(c)$ in der üblichen Weise so anordnet, dass man je alle gleichen unter ihnen zu einer Potenz vereinigt:

Bezeichnet c ein primitives Düotettarion, und ist:

$$N(c) = p^{a_1} \cdot q^{a_2} \cdot \ldots\ldots \cdot t^{a_n}$$

unter $p, q, \ldots t$ lauter von einander und von 1 verschiedene Primzahlen verstanden, so lässt sich c, und zwar nur auf eine Weise, in die Form setzen:

$$c = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \ldots \cdot \pi^{(a_1)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \cdot \ldots \cdot \varkappa^{(a_2)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(a_n)} \cdot \varepsilon$$

wobei $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots \pi^{(a_1)}$ primäre Primdüotettarionen von der Norm p, ferner $\varkappa^{(1)}, \varkappa^{(2)}, \ldots \varkappa^{(a_2)}$ solche von der Norm q, u. s. f., schliesslich $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots \tau^{(a_n)}$ solche von der Norm t bedeuten, und ε ein Einheitstettarion vorstellt.

Man erkennt sofort, dass in dieser Darstellung von c niemals zwei konjugierte Düotettarionen nebeneinander stehen können, denn sonst wäre ihr Produkt ein reelles Tettarion, somit vertauschbar mit jedem andern, und es würde c nicht primitiv sein. — Dieser Satz lässt sich umkehren, was bei μ-Tettarionen, sobald $\mu > 2$, im allgemeinen nicht der Fall ist:

4. *Ein Produkt aus primären Primdüotettarionen:*

$$\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \ldots \cdot \pi^{(a_1)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \cdot \ldots \cdot \varkappa^{(a_2)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(1)} \cdot \tau^{(2)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(a_n)}$$

in welchem $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots \pi^{(a_1)}$ die Norm p, ferner $\varkappa^{(1)}, \varkappa^{(2)}, \ldots \varkappa^{(a_2)}$ die Norm q, u. s. f., schliesslich $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots \tau^{(a_n)}$ die Norm t haben, unter $p, q, \ldots t$ lauter von einander und von 1 verschiedene Primzahlen verstanden, stellt immer ein primitives Düotettarion dar, wenn nirgends zwei konjugierte Primtettarionen nebeneinander stehen.

Der Beweis wird am einfachsten durch den Schluss der vollständigen Induktion geführt, da der Satz für $n = 1$ bereits zutrifft (§ 14, 2).

Voraussetzungen: $\pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots \cdot \pi^{(a_1)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(a_n)} = c$ ist ein primitives ganzes Düotettarion; ferner: $\pi^{(1)}$ ist ein von $(\Pi^{(2)})'$ verschiedenes, primäres, ganzes Primdüotettarion von der Norm $p \neq 1$:

$$N(\pi^{(1)}) = p; \; \pi^{(1)} \neq (\Pi^{(2)})'.$$

Behauptung: $\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots \cdot \pi^{(a_1)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(a_n)} = \pi^{(1)} \cdot c$ ist wieder ein primitives Düotettarion.

Beweis: Wäre das nicht der Fall, sondern $\pi^{(1)} \cdot c = m \cdot C$, unter m eine von 1 verschiedene ganze rationale Zahl verstanden, so müsste auch $(\Pi^{(1)})' \pi^{(1)} c = N(\pi^{(1)}) \cdot c = p \cdot c = m\,(\Pi^{(1)})' C$ durch m teilbar sein, was $m = p$ erfordern würde, weil c primitiv und p Primzahl ist.

Somit wäre $\pi^{(1)} \cdot \pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots \cdot \pi^{(a_1)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(a_n)} = \pi^{(1)} \cdot c = m \cdot C = p \cdot C = N(\pi^{(1)}) \cdot C = \pi^{(1)} \cdot (\Pi^{(1)})' \cdot C$; woraus:

$$\pi^{(2)} \cdot \pi^{(3)} \cdot \ldots \cdot \pi^{(a_n)} \cdot \varkappa^{(1)} \cdot \ldots \cdot \tau^{(a_n)} = c = (\Pi^{(1)})' \cdot C.$$

Nach vorigem Lehrsatze 3 ist aber die Darstellung von c als Produkt aus primären Primdüotettarionen vollkommen eindeutig bestimmt; somit müsste $\pi^{(2)} = (\Pi^{(1)})'$ sein, entgegen der ausdrücklichen Voraussetzung. Die Annahme $m \neq 1$, welche stets auf diesen Widerspruch führt, ist demnach auszuschliessen, d. h. $\pi^{(1)} \cdot c$ ist primitiv.

5. Die Anzahl der von einander verschiedenen primären Düotettarionen von der Norm $m = \prod_i p_i^{a_i}$ beträgt (v. § 9, 7):

$$\chi_2(m) = \prod_i \chi_2\left(p_i^{a_i}\right) = \prod_i \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Von diesen sind aber nicht alle primitiv. Die Anzahl der primitiven unter ihnen erhält man mit Hülfe des vorigen Lehrsatzes 4. Man hat nur in der dortigen Darstellung an Stelle von $\pi^{(1)}$ der Reihe nach jedes der $(p+1)$ primären Primdüotettarionen $\bar{\pi}$ von der Norm p zu setzen; dann jedes einzelne dieser $\pi^{(1)}$ mit $\pi^{(2)}$ zu kombinieren, wo an Stelle von $\pi^{(2)}$ jedes der p von $(\Pi^{(1)})'$ verschiedenen primären Primdüotettarionen $\bar{\pi}$ treten kann u. s. w.; die Anzahl der möglichen Kombinationen wird jedesmal mit p multipliziert, wenn man nach einem $\pi^{(i)}$ das folgende $\pi^{(i+1)}$ berücksichtigt, weil $\pi^{(i+1)}$ jedesmal p verschiedene Werte annehmen kann. Die $\pi^{(i)}$ ergeben somit insgesamt $(p+1) \cdot p^{a_1-1}$ verschiedene Kombinationen. In entsprechender Weise ergibt das Teilprodukt $\varkappa^{(1)} \cdot \varkappa^{(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot \varkappa^{(a_2)}$ im ganzen $(q+1) \cdot q^{a_2-1}$ verschiedene Möglichkeiten, u. s. f. Nach den getroffenen Annahmen ist es ausgeschlossen, dass irgendwo zwei konjugierte Tettarionen nebeneinander zu stehen kommen, auch wenn alle diese Möglichkeiten miteinander kombiniert werden. — Es ist hierbei vorausgesetzt worden, dass jede der Primzahlen $p, q, \ldots.$ positiv sei; die entgegengesetzte Annahme, etwa $p < 0$, ist unzulässig, da primäre Tettarionen definitionsgemäss nicht eine negative Norm haben können (v. § 9, 1 und 5). Beschränkt man sich also auf das Gebiet der ganzen Düotettarionen von positiver Norm, so gilt folgender Satz:

Bedeutet $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots\ldots \cdot p_n^{a_n} = \prod_i p_i^{a_i}$ *eine positive ganze Zahl, so gibt es stets*

$$\psi(m) = \prod_i (p_i + 1) \cdot p_i^{a_i - 1} = m \prod_i \left(1 + \frac{1}{p_i}\right)$$

von einander verschiedene linksseitig primäre und zugleich primitive Düotettarionen von der Norm m.

Bemerkung: Vergleicht man die obigen Anzahlen miteinander, so erkennt man:

Es gibt $(1+p+p^2+\ldots\ldots+p^{\alpha-2})=\frac{p^{\alpha-1}-1}{p-1}$ *von einander verschiedene, linksseitig primäre, aber nicht primitive Düotettarionen von der Norm* $m=p^\alpha$.

Kapitel II.

Die Tritettarionen.

$(\mu=3.)$

§ 3. Theorie der Ideale bei ganzen Tritettarionen.

1. Nachgewiesen sind bereits folgende Sätze:

Jedes aus rationalen ganzen Tritettarionen gebildete rechtsseitige Ideal, welches nicht ausschliesslich aus Nullteilern besteht, ist rechtsseitiges Hauptideal (§ 11, 6).

Jedes aus rationalen ganzen Tritettarionen gebildete rechtsseitige einkolonnige Nullteilerideal ist Hauptideal (§ 18, 4).

Jedes aus rationalen ganzen Tritettarionen gebildete rechtsseitige zweikolonnige Nullteilerideal, auch wenn es singulär sein sollte, ist rechtsseitiges Hauptideal (II. Teil § 1, 2).

Demnach bleibt nur noch der Fall zu betrachten übrig, in welchem das vorgelegte, aus ganzen Tritettarionen bestehende, rechtsseitige Nullteilerideal $\mathfrak{n}$ weder einkolonnig, noch zweikolonnig ist. Um zu entscheiden, ob es Hauptideal sei, genügt es, seine linksseitig reduzierten Tritettarionen zu betrachten (v. § 7, 5 und § 11, 5).

2. Es sei nun $a^{(\lambda)}=\begin{Bmatrix} a_{11}^{(\lambda)}, & a_{12}^{(\lambda)}, & a_{13}^{(\lambda)} \\ 0, & a_{22}^{(\lambda)}, & a_{23}^{(\lambda)} \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$ ein aus $\mathfrak{n}$ beliebig herausgegriffenes, linksseitig reduziertes Tritettarion. Wir dürfen jedenfalls $a_{11}^{(\lambda)}\neq 0$ und positiv voraussetzen, weil $\mathfrak{n}$ nicht zweikolonniges Nullteilerideal ist. Unter allen diesen linksseitig reduzierten Tritettarionen $a^{(\lambda)}$ des Ideals $\mathfrak{n}$, deren erste Komponente $a_{11}^{(\lambda)}$ positiv ist, betrachten wir diejenigen, bei welchen diese erste Komponente $a_{11}^{(\lambda)}$ möglichst klein ist, ohne jedoch zu verschwinden; eines derselben denken wir uns herausgehoben und bezeichnen es mit $\alpha=\begin{Bmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ 0, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$. Nach den getroffenen Annahmen ist dann niemals $0<|a_{11}^{(\lambda)}|<\alpha_{11}$, sondern:

$$\text{entweder } a_{11}^{(\lambda)}=0; \quad \text{oder aber } |a_{11}^{(\lambda)}|\geqq\alpha_{11}.$$

Man erkennt jetzt, dass alle ersten Komponenten der linksseitig reduzierten Tritettarionen aus $\mathfrak{n}$ Vielfache von α_{11} sind. Die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots\ldots. \alpha_{11} - 1$$

bilden nämlich ein vollständiges Restsystem ($mod\ \alpha_{11}$); somit existiert, für jeden Wert des Index λ, eine rationale ganze Zahl $q^{(\lambda)}$ derart, dass:

$$0 = a_{11}^{(\lambda)} - q^{(\lambda)} \cdot \alpha_{11} < \alpha_{11}.$$

Da aber zugleich mit α und $a^{(\lambda)}$ auch $a^{(\lambda)} - q^{(\lambda)} \cdot \alpha$ im Ideale $\mathfrak{n}$ auftritt, muss, wegen der getroffenen Annahmen,

$$a_{11}^{(\lambda)} - q^{(\lambda)} \cdot \alpha_{11} = 0, \text{ d. h. } a_{11}^{(\lambda)} = q^{(\lambda)} \cdot \alpha_{11}$$

sein. — Jedem linksseitig reduzierten Tritettarion $a^{(\lambda)}$ aus $\mathfrak{n}$ lässt sich demnach eine ganze Zahl $q^{(\lambda)}$ derart zuordnen, dass die erste Komponente von

$$s^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} - q^{(\lambda)} \cdot \alpha$$

verschwindet. Sämtliche $s^{(\lambda)}$ sind in $\mathfrak{n}$ enthalten. Ihre Gesamtheit bildet ein rechtsseitiges Ideal, denn zugleich mit

$$s^{(i)} = a^{(i)} - q^{(i)} \cdot \alpha \text{ und } s^{(\varkappa)} = a^{(\varkappa)} - q^{(\varkappa)} \cdot \alpha$$

ist auch
$$s^{(i)} \pm s^{(\varkappa)} = a^{(n)} \pm q^{(n)} \cdot \alpha,$$
ferner auch
$$g \cdot s^{(i)} = g \cdot a^{(i)} - q^{(i)} \cdot g \cdot \alpha = a^{(m)} - q^{(i)} \cdot g \cdot \alpha$$

im Systeme der $s^{(\lambda)}$ enthalten (v. § 11, 1). Dieses durch die Gesamtheit aller $s^{(\lambda)}$ gebildete rechtsseitige Ideal ist zweikolonnig, somit stets identisch mit einem rechtsseitigen Hauptideale $(g \cdot \delta)$.

Für alle Werte des Index λ besteht demnach die Gleichung:

$$s^{(\lambda)} = g^{(\lambda)} \cdot \delta.$$

Jedes Tritettarion aus $\mathfrak{n}$ hat somit die Gestalt:

$$t = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot a^{(\lambda)} = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot [q^{(\lambda)} \cdot \alpha + g^{(\lambda)} \cdot \delta]$$

und ist demnach im rechtsseitigen Ideale $(f \cdot \alpha + g \cdot \delta)$ enthalten; das Umgekehrte trifft auch zu, weil α und δ selbst in $\mathfrak{n}$ auftreten. Das vorgelegte $\mathfrak{n}$ ist demnach identisch mit dem aus α und δ erzeugten rechtsseitigen Ideale $(f \cdot \alpha + g \cdot \delta)$, dessen Basis $[\alpha, \delta]$ ist. (§ 11, 4).

3. Es lässt sich nun direkt zeigen, dass jedes aus ganzen Tritettarionen gebildete rechtsseitige Nullteilerideal, auch wenn es weder ein-, noch zweikolonnig ist, stets dann Hauptideal sein muss, wenn es eine endliche Basis besitzt.

Zuvörderst sei bemerkt, dass das aus $a = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ 0, a_{22}, a_{23} \\ 0, 0, 0 \end{Bmatrix}$ und

$b = \begin{Bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ 0, & b_{22}, & b_{23} \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$ erzeugte rechtsseitige Ideal $(g \cdot a + f \cdot b)$ stets und nur dann Nullteilerideal ist, wenn zwischen den $a_{i,\varkappa}$ und $b_{i,\varkappa}$ folgende Beziehungen stattfinden:

$$a_{11} \cdot (a_{22} \cdot b_{23} - a_{23} \cdot b_{22}) = 0$$
$$b_{11} \cdot (a_{22} \cdot b_{23} - a_{23} \cdot b_{22}) = 0$$
$$a_{22} (a_{11} \cdot b_{13} - a_{13} \cdot b_{11}) = a_{23} (a_{11} \cdot b_{12} - a_{12} \cdot b_{11})$$
$$b_{22} (a_{11} \cdot b_{13} - a_{13} \cdot b_{11}) = b_{23} (a_{11} \cdot b_{12} - a_{12} \cdot b_{11}).$$

Dies stellt sich heraus, wenn man $g a + f b = s$ setzt und dann ausdrückt, dass $N(s)$ für alle möglichen Werte der ganzen Tritettarionen g und f, also identisch, verschwinden muss. — Sind diese Beziehungen nicht befriedigt, so enthält das betreffende Ideal Tritettarionen von nicht verschwindender Norm und ist also Hauptideal (v. § 11, 6).

Nach dem oben in 2 Gesagten genügt es, $a = \alpha$ und $b = \delta$ anzunehmen. Ferner darf man:

$a = \begin{Bmatrix} \alpha_{11}, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$ und $b = \begin{Bmatrix} 0, & \delta_{12}, & \delta_{13} \\ 0, & 0, & \delta_{23} \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$ setzen, denn erstens erzeugen linksseitig assoziierte Tritettarionen dasselbe rechtsseitige Ideal; und zweitens sind $(g \cdot a + f \cdot b)$ und $(g \cdot a + f \cdot b) \cdot \varepsilon$ immer gleichzeitig Hauptideale oder nicht. Bei diesen vereinfachenden Annahmen reduzieren sich die vorigen vier Bedingungen auf folgende drei:

$$\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \delta_{23} = 0 \tag{1}$$
$$\alpha_{22} \cdot \alpha_{11} \cdot \delta_{13} = 0 \tag{2}$$
$$\delta_{23} \cdot \alpha_{11} \cdot \delta_{12} = 0. \tag{3}$$

Sie sind erfüllt, wenn $\alpha_{11} = 0$; dann ist aber das betreffende Ideal zweikolonnig, somit Hauptideal, ebenso wenn $\alpha_{11} \neq 0$ und $\alpha_{22} \neq 0$, denn es müsste dann, wegen (1) und (2), $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$ ausfallen.

Wir nehmen also

$$\alpha_{11} \neq 0; \quad \alpha_{22} = 0$$

an; dann verschwindet noch das Produkt $\delta_{12} \cdot \delta_{23}$, wie (3) lehrt. Sobald $\delta_{12} = 0$ angenommen wird, ist das betreffende Ideal ein zweikolonniges, und als solches sicher Hauptideal (II. Teil § 1, 2).

Demnach bleibt nur noch der Fall $\delta_{12} \neq 0, \delta_{23} = 0$, d. h.:

$$a = \begin{Bmatrix} \alpha_{11}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix} \text{ und } b = \begin{Bmatrix} 0, & \delta_{12}, & \delta_{13} \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$$

zu behandeln übrig. Damit das aus a und b erzeugte rechtsseitige Ideal Hauptideal sei, ist notwendig und hinreichend, dass ein Tritettarion x mit folgenden zwei Eigenschaften existiere:

1): x ist ein rechtsseitiger gemeinsamer Teiler von a und b, etwa:

$$a = \eta \cdot x; \quad b = \vartheta \cdot x.$$

2): x ist im Ideale selbst enthalten. Setzt man nun:

$$x = \begin{Bmatrix} \alpha_{11}, & 0, & 0 \\ 0, & \delta_{12}, & \delta_{13} \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}; \text{ ferner: } \eta = e^{(1,1)} + e^{(3,3)} = \begin{Bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1 \end{Bmatrix};$$

$$\vartheta = \begin{Bmatrix} 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0 \end{Bmatrix} = e^{(1,2)}; f = e^{(2,1)} = \begin{Bmatrix} 0, 0, 0 \\ 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0 \end{Bmatrix}$$

so wird tatsächlich: $\eta \cdot x = a$; $\vartheta \cdot x = b$; ferner:

$$a + f \cdot b = \eta \cdot x + f \cdot \vartheta \cdot x = (\eta + f\vartheta)\, x = h \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

Infolgedessen ist das rechtsseitige Ideal $(g \cdot a + f \cdot b)$ identisch mit dem rechtsseitigen Hauptideale $(g \cdot x)$.

Das zusammenfassende Resultat dieser Untersuchungen, sowie derjenigen von § 11, ist folgender allgemeine, ausnahmslos geltende Lehrsatz:

Jedes aus rationalen ganzen Tritettarionen gebildete rechts- oder linksseitige Ideal ist Hauptideal.

4. Erwähnt sei folgende Konsequenz dieses Satzes:

Jedes aus rationalen ganzen μ-Tettarionen bestehende dreikolonnige rechts- oder linksseitige Nullteilerideal ist Hauptideal, auch wenn es singulär sein sollte. Man überzeugt sich davon durch die im II. Teil § 1, 2 angedeutete Kette von Schlüssen, indem man nämlich die linksseitig reduzierten μ-Tettarionen des Ideals betrachtet und dieselben durch eine Permutation (§ 5, 2 und 3) auf „entsprechende" Tritettarionen abbildet.

